# I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

*Матрицей размера m x n называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.*

Обозначается: $\underset{m\times n}{A}$.

*Числа* $a_{ij}$ *, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.*

Индекс *i*– номер строки, индекс *j* – номер столбца. *i=1,2…m, j=1,2…n.*

В общем виде матрицу можно записать:

$$\underset{m\times n}{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая *матрица* называется *квадратной*.

*Элементы матрицы* $a_{ij}$ , у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются *диагональными.*

Если в квадратной *матрице* все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется *единичной (обозначается Е).*

Над матрицами можно проводить следующие действия:

### *1.1 Умножение матрицы на число*

*Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.*

Если дана матрица $A = (a_{ij})$, которая умножается на число $\lambda$, то результирующей матрицей будет $B = (b_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $3 \cdot A$*, если* $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Решение:*

Используя правила вычитания матриц и умножения матрицы на число, имеем:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

### *1.2 Сложение матриц*

*Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.*

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$. Результатом их сложения будет матрица $C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Аналогично проводится вычитание матриц.

ПРИМЕР.

*Найти сумму и разность матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Складывая и вычитая соответствующие элементы матриц, находим:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -3+5 \\ 3+5 & 7+4 \\ 5+0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 11 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & -3-5 \\ 3-5 & 7-4 \\ 5-0 & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

### *1.3 Умножение матриц*

*Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i – ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.*

Пусть даны матрицы $\underset{m\times k}{A} = (a_{ij})$ $\underset{k\times n}{B} = (b_{ij})$. Результатом их умножения получится матрица $\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$, каждый элемент которой находится по правилу $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

ПРИМЕР.

*Найти произведение матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, поэтому произведение этих матриц существует. Используем правило умножения матриц: каждый элемент результирующей матрицы равен сумме произведений элементов соответствующей строки первой матрицы на элементы соответствующего столбца второй матрицы:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

### *1.4 Транспонирование матриц*

*Матрица $A^T$ называется транспонированной* к матрице А, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

ПРИМЕР.

*Транспонировать матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

По определению операции транспонирования, меняем в исходной матрице строки и столбцы местами:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

### *1.5 Определитель матрицы*

*Определитель* – это число, характеризующее квадратную матрицу.

Обозначается: $|A|, \Delta$.

Определителем первого порядка матрицы $A = (a_{11})$ называется число

$$|A| = \Delta A = |a_{11}|.$$

ПРИМЕР.

*Определителем матрицы* $A = (-5)$ *будет само число* $|A| = |-5| = -5$

*Определителем второго порядка* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое находится по правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

ПРИМЕР.

*Вычислить определитель второго порядка матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>*Решение:*</u>

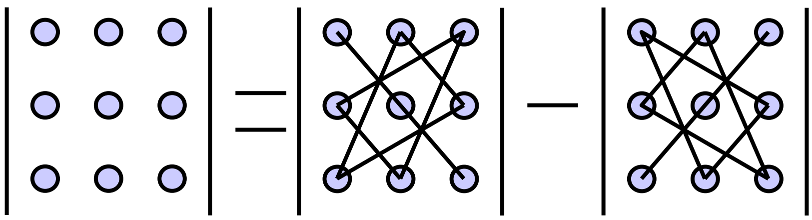
Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) = 17$$

<u>*Определителем третьего порядка матрицы*</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, которое определяется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников:



ПРИМЕР.

*Вычислить определитель третьего порядка матрицы:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*Решение:*</u>

Определитель третьего порядка находится по правилу треугольников:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 = -40$$

*Свойство 1:* Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов стоящих на главной диагонали.

*Свойство 2:* Определитель единичной матрицы равен единице.

*Свойство 3:* Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов стоящих на главной диагонали.

*Свойство 4:* При транспонировании величина определителя не изменяется т.е. $\left|A^T\right| = |A|$.

*Свойство 5:* При перестановки местами двух радом стоящих строк или столбцов определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

*Свойство 6:* Линейное свойство определителя:

$$\begin{vmatrix} a'_{1j} + a''_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{vmatrix}$$

*Свойство 7:* Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

*Свойство 8:* Умножение всех элементов строки или столба на число $\lambda$ равносильно умножению определителя на это число$\lambda$.

*Свойство 9:* Если все элементы некоторой строки или столбца равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

*Свойство 10:* Если элементы двух строк или столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.

*Свойство 11:* Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель $\lambda$, то величина определителя не изменится.

*Свойство 12 (Теорема Якоби)*: Если к элементам некоторого столбца определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на произвольный множитель $\lambda$, то величина определителя не изменится.

*Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, полученный из исходного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент**.** Минор элемента $a_{ij}$ обозначается $m_{ij}$ .

*Алгебраическим дополнением* некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^S$ , где $S$ – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Обозначается: $A_{ij} = (-1)^S m_{ij}$, где $S = i + j$ .

*Определитель любого порядка может быть найден по правилу:*

*Определитель* равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\left|A\right| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$$

ПРИМЕР.

*Вычислить определитель матрицы, используя разложение определителя по строке или столбцу:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Запишем разложение определителя по первой строке:

$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 3 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{14}$, где $A_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$.

Найдем алгебраические дополнения по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$, где $m_{ij}$ - минор элемента $a_{ij}$, который получается из исходного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot m_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 11 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 7 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 11 = 14$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot m_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 9 & 7 & 11 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 11 + 9 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 7 \cdot 6 - 1 \cdot 9 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 11) = -28$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot m_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 11 + 1 \cdot 9 \cdot 6 - 3 \cdot 3 \cdot 6 - 9 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 11 = -28$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot m_{14} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 7 + 1 \cdot 9 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 7) = 14$$

Подставляем полученные значения в разложение определителя:

$$\left|A\right| = 5 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{14} = 5 \cdot 14 + 1 \cdot (-28) + 3 \cdot (-28) + 3 \cdot 14 = 0 .$$

*Замечание.*

*Если в матрице имеются нулевые элементы, то удобнее раскладывать определитель по той строке или столбцу, который содержит большее число нулей.*

### *1.6 Обратная матрица*

*Матрица $A^{-1}$ называется обратной к матрице A, если AB=BA=E, где E – единичная матрица.*

*Для нахождения обратной матрицы используется следующий алгоритм:*

1. Определяют, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.
2. Находят определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, то обратной матрицы для нее не существует.
3. Заменяют каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением.
4. Полученную матрицу транспонируют.
5. Каждый элемент полученной матрицы делят на определитель исходной матрицы. Результирующая матрица является обратной для исходной матрицы.
6. Делают проверку: перемножают исходную и полученную матрицы. В результате должна получиться единичная матрица.

ПРИМЕР.

*Для данной матрицы найти обратную матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

*Решение:*

Используем алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Матрица квадратная (число строк равно числу столбцов), следовательно обратная к ней матрица существует.

2. Находим определитель исходной матрицы:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -49 \neq 0$$

3. Находим матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 3=-7;\qquad A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-(2\cdot(-1)-4\cdot 3)=14;$

$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=(2\cdot 2-4\cdot 1)=0;\qquad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-((-2)\cdot(-1)-5\cdot 2)=8;$

$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot 5=-23;\qquad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(3\cdot 2-4\cdot(-2))=-14$

$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-1\cdot 5=-11;\qquad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-(3\cdot 3-2\cdot 5)=1$

$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot(-2))=7$

Таким образом, получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & 14 & 0\\ 8 & -23 & -14\\ -11 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

4. Полученную матрицу транспонируем:

$$\begin{pmatrix}-7 & 14 & 0\\ 8 & -23 & -14\\ -11 & 1 & 7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-7 & 8 & -11\\ 14 & -23 & 1\\ 0 & -14 & 7\end{pmatrix}$$

5. Последнюю матрицу делим на определитель исходной матрицы и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-7 & 8 & -11\\ 14 & -23 & 1\\ 0 & -14 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & -\frac{8}{49} & \frac{11}{49}\\ -\frac{2}{7} & \frac{23}{49} & -\frac{1}{49}\\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

6. Осуществляем проверку полученного результата. Для этого находим произведение полученной матрицы на исходную:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & -\frac{8}{49} & \frac{11}{49}\\ -\frac{2}{7} & \frac{23}{49} & -\frac{1}{49}\\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\cdot 3+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 2+\frac{11}{49}\cdot 4 & \frac{1}{7}\cdot(-2)+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 1+\frac{11}{49}\cdot 2 & \frac{1}{7}\cdot 5+\left(-\frac{8}{49}\right)\cdot 3+\frac{11}{49}\cdot(-1)\\ \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 3+\frac{23}{49}\cdot 2+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot 4 & \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot(-2)+\frac{23}{49}\cdot 1+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot 2 & \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 5+\frac{23}{49}\cdot 3+\left(-\frac{1}{49}\right)\cdot(-1)\\ 0\cdot 3+\frac{2}{7}\cdot 2+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot 4 & 0\cdot(-2)+\frac{2}{7}\cdot 1+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot 2 & 0\cdot 5+\frac{2}{7}\cdot 3+\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Таким образом, получили в результате единичную матрицу. Следовательно, обратная матрица была найдена верно.

## ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Система m линейных уравнений с n переменными в общем случае имеет вид:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа $a_{ij}$ $(i = 1{,}2 \ldots m, \quad j = 1{,}2 \ldots n)$ называются коэффициентами при переменных,

$b_i$ - свободные члены,

$x_j$ - неизвестные величины.

*Решением системы линейных* уравнений называется такая совокупность чисел $k_1$, $k_2, \ldots k_n$ при подстановке которых каждое уравнение обращается в верное равенство.

В матричной форме система уравнений записывается следующим образом:

***AX=B,***

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица – столбец неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов.

Рассмотрим способы решения системы линейных уравнений.

## *2.1 Метод Гаусса*

Этот метод заключается в последовательном исключении переменных из системы уравнений. Рассмотрим его на конкретном примере.

ПРИМЕР. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

*Решение:*

Составляем расширенную матрицу системы, в которую входят коэффициенты при переменных и свободные члены:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Чтобы исключить переменную $x_1$ из второго и третьего уравнений, умножим первую строку на (-2) и (-3) и полученные строки прибавим ко второй и третьей строке соответственно:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)(-2)(-3) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Чтобы исключить переменную $x_3$ из третьего уравнения, умножим вторую строку на (-1) и полученную строку прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right)(-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Получили систему уравнений, равносильную исходной системе, в которой первое уравнение содержит три переменных, второе – две, а третье – одну переменную:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$x_2 = 2; \qquad -14 + 4x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 3; \qquad x_1 + 4 - 3 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

Таким образом, решение системы:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3 .$$

Проверяем полученное решение, подставляя найденные значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 1+2\cdot 2-3=2 \\ 2\cdot 1-3\cdot 2+2\cdot 3=2 \\ 3\cdot 1+2+3=8 \end{cases}$$

Получили тождественные равенства, следовательно система решена правильно.

## *2.2 Метод Крамера*

Пусть дана система линейных уравнений. Рассмотрим частный случай, когда число неизвестных равно числу уравнений ($m=n$). Найдем определитель матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Пусть $\Delta j$ – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой $j$–го столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и так далее.

Тогда, если определитель матрицы системы не равен 0, то система уравнений (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,2...n)$$ <u>*- формулы Крамера.*</u>

ПРИМЕР.

*Решить систему уравнений методом Крамера:*

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=2 \\ 3x_1+x_2+x_3=8 \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u>

Составляем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем определитель этой матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+12-2-9-2-4=-8 \neq 0$$

Находим определители $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, получающиеся из исходного определителя заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6+32-2-24-4-4=-8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2+12-16+6-16-4=-16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24+12+4+18-32-2=-24$$

Теперь используя формулы Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, находим решение системы:

$$x_1 = \frac{-8}{-8} = 1; \quad x_2 = \frac{-16}{-8} = 2; \quad x_3 = \frac{-24}{-8} = 3.$$

## *2.3 Метод обратной матрицы*

Пусть дана система линейных уравнений. Снова рассмотрим случай, когда число неизвестных равно числу уравнений.

В матричной форме система имеет вид: *AX=B*. Пусть существует обратная матрица $A^{-1}$ к матрице системы А. Тогда решением матричного уравнения будет матрица-столбец X, который находится по правилу:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

ПРИМЕР.

*Решить систему уравнений методом обратной матрицы:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

*Решение:*

Запишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы $A$ был найден ранее: $\Delta A = -8$.

Найдем матрицу, обратную к матрице А. Для этого составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов определителя матрицы А и транспонируем ее:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 11 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу делим на определитель исходной матрицы и записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Решением исходной системы уравнений будет матрица-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, найденная как произведение обратной матрицы на матрицу-столбец свободных членов:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -10-6+8 \\ 8+8-32 \\ 22+10-56 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

### *2.4 Метод Жордана – Гаусса*

ПРИМЕР. *Решить систему линейных уравнений методом Жордана – Гаусса.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

*Решение:* Метод Жордана-Гаусса.

Путем элементарных преобразований расширенную матрицу системы приведем к каноническому виду.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $в$ |
|---|---|---|---|
| 2 | -3 | 1 | -7 |
| 1 | 2 | -3 | 14 |
| -1 | -1 | 5 | -18 |
| 2 | -3 | 1 | -7 |
| 7 | -7 | 0 | -7 |
| -11 | 14 | 0 | 17 |
| 2 | -3 | 1 | -7 |
| 1 | -1 | 0 | -1 |
| -11 | 14 | 0 | 17 |
| 0 | -1 | 1 | -5 |
| 1 | -1 | 0 | -1 |
| 0 | 3 | 0 | 6 |
| 0 | -1 | 1 | -5 |
| 1 | -1 | 0 | -1 |
| 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | -3 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 2 |

Итак, $x_3 = -3, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$.

## ТЕМА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

### *3.1 Системы координат*

Прямая линия, с указанным на ней направлением, называется *осью.*

Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая – концом. Обозначение $\vec{AB}$ - направленный отрезок с началом в точке *A* и концом в точке *B*.

Направленный отрезок, у которого точка начала совпадает с точкой конца, называется *нулевым отрезком* или отрезком с *нулевым направлением*.

С каждым направленным отрезком сопоставляется его числовая характеристика – <u>*величина направленного отрезка*</u>. Величиной $AB$ направленного отрезка $\vec{AB}$ называется число, равное длине отрезка $\vec{AB}$, взятое со знаком плюс, если направление $\vec{AB}$ совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление $\vec{AB}$ противоположно направлению оси.

Два ненулевых направленных отрезка называются <u>*равными*</u>, если при совмещении начал этих отрезков совпадают и их концы.

Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными.

ТЕОРЕМА 1: Необходимым и достаточным условием равенства двух направленных отрезков на данной оси является равенство величин этих отрезков.

*Линейными операциями над направленными отрезками будем называть сложение таких отрезков и умножение направленного отрезка на вещественное число.*

Для определения суммы двух направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ совместим начало $C$ отрезка $\vec{CD}$ с концом $B$ отрезка $\vec{AB}$. Полученный при этом направленный отрезок $\vec{AD}$ называется *суммой* направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ и обозначается $\vec{AB}+\vec{CD}$.

ТЕОРЕМА 2: Величина суммы направленных отрезков равна сумме величин слагаемых отрезков.

*Следствие*: При любом расположении точек *A, B, C* на числовой оси величины направленных отрезков $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{AC}$ удовлетворяют соотношению $AB+BC=AC$, которое называется <u>*основным тождеством*</u>.

<u>*Произведением*</u> направленного отрезка $\vec{AB}$ <u>*на вещественное число* $\alpha$</u> называется направленный отрезок, обозначаемый $\alpha\vec{AB}$, длина которого равна произведению числа $|\alpha|$ на длину отрезка $\vec{AB}$ и направление которого совпадает с направлением отрезка $\vec{AB}$ при $\alpha>0$ и противоположно направлению $\vec{AB}$ при $\alpha<0$.

Величина направленного отрезка $\alpha\vec{AB}$ равна $\alpha AB$.

### 3.2 *Декартовы координаты на плоскости*

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей образуют <u>*декартову прямоугольную систему координат на плоскости (Рис. 3.1).*</u>

Одна из осей называется <u>*осью Ох*</u>, или осью <u>*абсцисс*</u>, другую – осью <u>*Оу,*</u> или осью <u>*ординат*</u>. Эти оси называют также <u>*координатными осями.*</u>

Обозначим через $M_x$ и $M_y$ соответственно проекции произвольной точки $M$ плоскости на оси $Ox$ и $Oy$.

*Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M* будем называть соответственно величины направленных отрезков $\vec{OM}_x$ и $\vec{OM}_y$ .

*Обозначение M(x,y).*

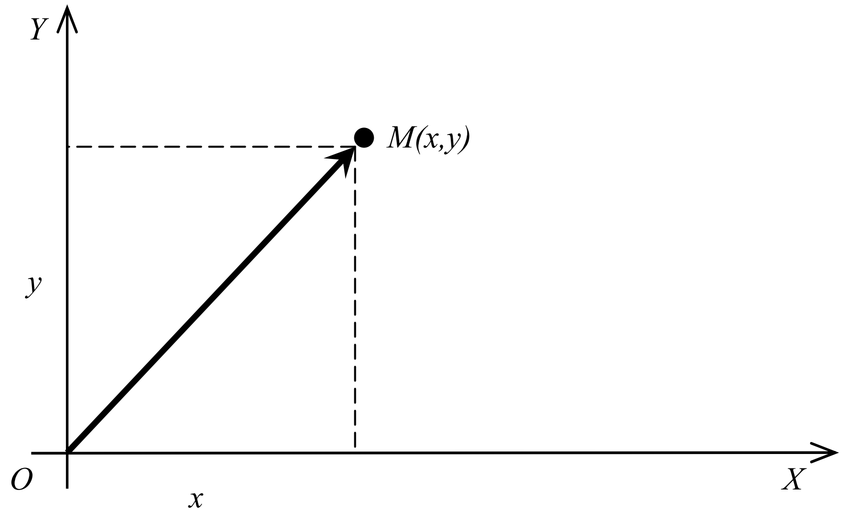



Рис.3.1

ТЕОРЕМА 3: Пусть $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$– две точки на оси, тогда расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между точками $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ может быть найдено по формуле $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

### 3.3 *Декартовы координаты в пространстве*

Три взаимно перпендикулярных оси в пространстве (координатные оси) с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве (Рис. 3.2). Одна из осей называется *осью Ox*, или осью *абсцисс*, другую – осью *Oy*, или осью *ординат*, третью осью *Oz*, или осью *аппликат.*

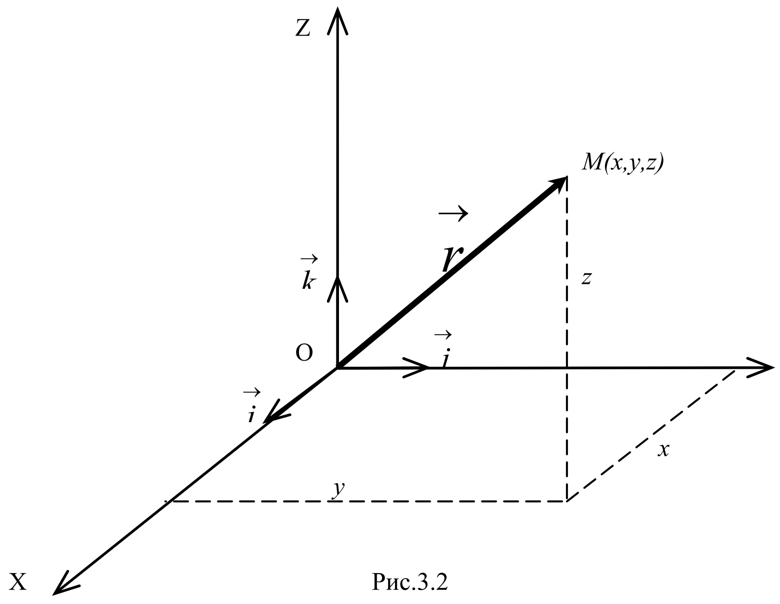



Рис.3.2

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - отры (единичные векторы) декартовой система координат.

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки $M$ $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

Если на плоскости даны две точки с координатами $A(x_1, y_1)$ *и* $B(x_2, y_2)$, то расстояние между этими точками вычисляется по формуле:

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ,

т.е. длина отрезка равна квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат его концов. В частности, расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат определяется по формуле $OM=\sqrt{x^2+y^2}$

ПРИМЕР. Найти расстояние между точками А (2; -1) и В (5; 3).

<u>*Решение:*</u> Случае $x_1=2$, $y_1=-1$, $x_2=5$, $y_2=3$, поэтому $AB=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$.

Если даны координаты трех вершин треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, то его площадь может быть вычислена по формуле:

$S=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$.

<u>*Деление отрезка в данном отношении*</u>

*Если точка* $M(x, y)$ *лежит на прямой, проходящей через данные точки* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, *и делит отрезок* $M_1M_2$ *в отношении* $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, *то координаты точки* $M$ *определяются по формулам*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

В частности, если точка $M(x, y)$ делит отрезок $M_1M_2$ пополам, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

При решении задач следует помнить о том, что в эти формулы вместо $x$ и $y$ нужно ставить координаты той из двух данных точек, которая стоит в числителе отношения, определяющего $\lambda$.

### *3.4 Вектор. Основные понятия.*

Геометрическим вектором, или просто <u>*вектором*</u>, будем называть направленный отрезок.

Обозначение вектора, либо как направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, где точки $A$ и $B$ обозначают соответственно начало и конец вектора, либо латинской прописной буквой $\vec{a}$

Обозначение длины вектора, либо $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, либо $\left|\vec{a}\right|$

Вектор называется *нулевым* если его начало и конец совпадают.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Все нулевые вектора считаются равными.

*Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ *(правило треугольника (Рис.3.3))*.

***Правило треугольника***

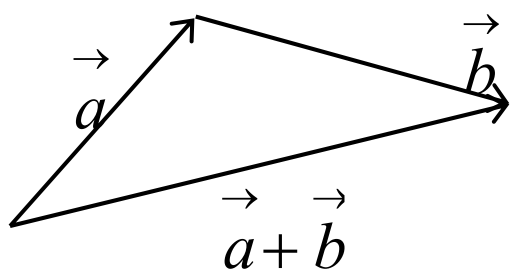



*Рис.3.3*

***Правило параллелограмма***

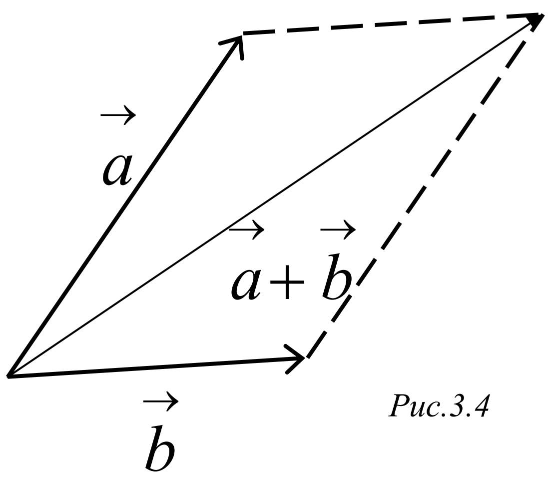



*Рис.3.4*

*Свойства сложения векторов:*

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);

3. Существует *нулевой вектор* $\vec{o}$ такой, что $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует *противоположный* ему вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{o}$

*Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

ТЕОРЕМА 4: Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, то существует вещественное число $\lambda$ такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

*Линейной комбинацией n векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, т. е. выражение вида:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i\ ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2,\dots\ \alpha_n$ вещественные числа.

Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2,\dots\ \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ с указанными числами обращается в нуль, т.е. имеет место равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=0 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i=0.$$

Вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство нулю их линейной комбинации $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{a}_i$ возможно лишь в случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2,\dots\ \alpha_n$ равны нулю.

ТЕОРЕМА 5: Если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

ТЕОРЕМА 6: Если среди *n* векторов какие-либо *(n-1)* векторов линейно зависимы, то и все *n* векторов линейно зависимы.

ТЕОРЕМА 7: Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

*Следствие 1*: Если вектора ***a*** *и* ***b*** не коллинеарны, то они линейно независимы.

*Следствие 2:* Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.

Вектора называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

ТЕОРЕМА 8: Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Следствие 1: Каковы бы ни были неколлинеарные векторы ***a*** *и* ***b*** для любого вектора ***c***, лежащего в одной плоскости с векторами ***a*** *и* ***b***, найдутся такие вещественные числа $\lambda$ и $\mu$, что справедливо равенство $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ (Рис. 3.5):

Следствие 2: Если векторы ***a***, ***b*** *и* ***c*** не компланарны, то они линейно независимы.

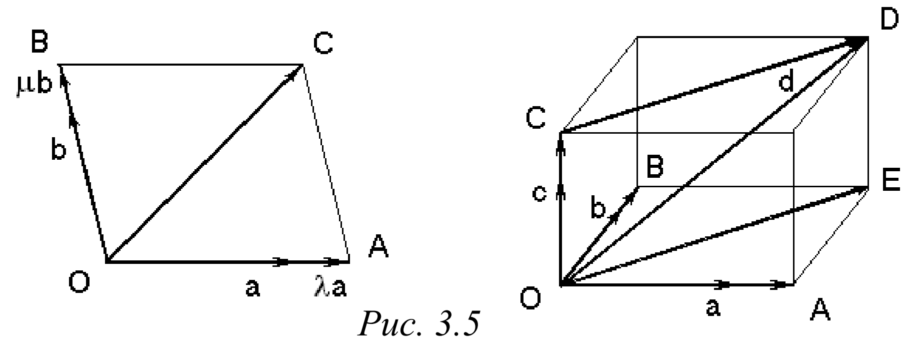



*Рис. 3.5*

ТЕОРЕМА 9: Любые четыре вектора линейно зависимы.

### 3.5 *Скалярное произведение двух векторов*

Углом между двумя векторами ***a*** *и* ***b*** называется угол, не превосходящий $\pi$, между двумя лучами исходящими из одной точки, один из которых имеет направление совпадающее с направлением вектора ***a***, другой имеет направление совпадающее с направлением вектора ***b***.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$(\mathbf{ab}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$

ТЕОРЕМА 10: Необходимым и достаточным условием ортогональности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

ТЕОРЕМА 11: Два ненулевых вектора ***a*** *и* ***b*** составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Свойства скалярного произведения:

1. $(\mathbf{ab})=(\mathbf{ba})$ (переместительное свойство);
2. $((\alpha\mathbf{a})\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{ab})$ (сочетательное свойство относительно числового множителя);
3. $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c})=(\mathbf{ac})+(\mathbf{bc})$ (распределительное свойство относительно суммы векторов);
4. $(\mathbf{aa})>0$, *если* ***a*** – ненулевой вектор, и $(\mathbf{aa})=0$, если ***a*** – нулевой вектор.

Следствие: $(\mathbf{aa}) = |\mathbf{a}|^2$

ТЕОРЕМА 12: Если два вектора ***a*** *и* ***b*** определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат – $(\boldsymbol{ab})= x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

<u>*Следствие 1*</u>: Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ *и* $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ является равенство - $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

<u>*Следствие 2*</u>*:* Угол φ между векторами $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ *и* $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

ПРИМЕР. *Векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *образуют угол* $\frac{\pi}{3}$. *Зная, что* $|\bar{a}| = 3$ $|\bar{b}| = 4$*, найти длину вектора* $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$

<u>*Решение*</u>: Длину вектора $\bar{c}$ можно найти по формуле $(\boldsymbol{aa}) = |\boldsymbol{a}|2$, если будет известен его скалярный квадрат

$$\bar{c}^2 = (3\bar{a} + 2\bar{b})^2 = 9a^2 + 12\overline{ab} + 4\bar{b}^2.$$

по определению скалярного произведения

$$\bar{a}^2 = |\underline{a}|^2 = 9, \bar{b}^2 = |\bar{b}|^2 = 16, \overline{ab} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

следовательно,

$$\bar{c}^2 = 9 \cdot 9 + 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 217,$$

тогда $|\bar{c}| = \sqrt{c^{-2}} = \sqrt{217} \approx 14.7$.

ПРИМЕР. *На материальную точку действуют силы*

$$\bar{f}_1 = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \bar{f}_2 = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}, \bar{f}_3 = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$

*Найти работу равнодействующей этих сил* $\bar{R}$ *при перемещении точки из положения*

*A(2;-1;0) в положении B(4;1;-1).*

<u>*Решение:*</u> Найдем равнодействующую $\bar{R}$

$$\bar{R} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$$

Вектор перемещения

$$\bar{s} = \overline{AB} = (4-2)\bar{i} + (1+1)\bar{j} + (-1-0)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$$

Искомую работу найдем как скалярное произведение силы на перемещение:

$$A = (\bar{R}; \bar{s}) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1(-1) = 4 + 4 - 1 = 7.$$

ПРИМЕР. *Даны вершины треугольника A (3; 2; 3), B(5; 1; —1) и C(1; 2; 1). Найти внутренний угол при вершине A.*

Решение: Искомый угол $\varphi$ есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. По координатам концов найдем эти векторы

$$\overline{AB} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}, \overline{AC} = -2\bar{i} - 4\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Отсюда $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3, \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6.$

Найдем скалярное произведение

$$(\overline{AB}; \overline{AC}) = 2(-2) - 1(-4) + 2 \cdot 4 = -4 + 4 + 8 = 8.$$

Применяя теперь формулу, получим

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{AB}; \overline{AC})}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{8}{3 \cdot 6} = \frac{4}{9};$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{9} \approx 63^0 36'.$$

### *3.6 Векторное и смешанное произведение двух векторов*

Векторным произведением вектора ***a*** *на вектор* **b** называется вектор ***c***, обозначаемый символом ***c***=*[**ab**]* и удовлетворяющий следующим требованиям:

1. длина вектора ***c*** равна произведению длин векторов ***a*** *и* **b** на синус угла φ между ними, т.е. |***c***|=|*[**ab**]*|= |***a***|·|**b**|·$sin\varphi$

2. вектор ***c*** ортогонален каждому из векторов ***a*** *и* **b**;

3. вектор ***c*** направлен так, что тройка векторов ***abc*** является правой.

ТЕОРЕМА 13: Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

*Свойства векторного произведения.*

1. ***[ab]= -[ba]*** (антиперестановочное свойство сомножителей);

2. ***[(αa)b]= α[ab]*** (сочетательное свойство относительно числового множителя);

3. ***[(a+b)c]=[ac]+[bc]*** (распределительное свойство относительно суммы двух векторов);

4. ***[aa]***=0 для любого вектора ***a***.

ТЕОРЕМА 14: Если два вектора ***a*** *и* **b** определены своими декартовыми прямоугольными координатами ***a***=$(x_1,y_1,z_1)$, **b**=$(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение этих векторов равно

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2-y_2z_1, z_1x_2-z_2x_1, x_1y_2-x_2y_1).$$

Следствие: Если два вектора ***a***=$(x_1,y_1,z_1)$, **b**=$(x_2,y_2,z_2)$ коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Пусть даны три произвольных вектора ***a**, **b** и **c***. Если вектор ***a*** векторно умножить на вектор ***b***, а затем получившийся при этом вектор *[**ab**]* скалярно умножить на вектор ***c***, то получившиеся в результате число*[**ab**]**c***, называется <u>*смешанным произведением*</u> векторов ***a**, **b** и **c***.

ТЕОРЕМА 15: Смешанное произведение ***[ab]c*** равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах ***a**, **b*** и ***c***, взятому со знаком плюс, если тройка векторов ***abc*** правая, и со знаком минус, если тройка ***abc*** левая.

<u>*Следствие*</u>: Справедливо равенство ***[ab]c = a[bc].***

ТЕОРЕМА 16: Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

ТЕОРЕМА 17: Если три вектора ***a, b** и **c*** определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ , $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то смешанное произведение этих векторов равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ТЕОРЕМА 18: Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ , $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ , $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$ является равенство нулю определителя, строками которого служат координаты этих векторов, т.е. равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕР. *Найти площадь треугольника с вершинами А (1; 2; О),*

*В (3 0, -3) и С(5; 2; 6).*

<u>*Решение:*</u> Площадь треугольника АВС равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

$$S\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\,\overline{AC}\right\|.$$

Найдем векторы $\overline{AB} и \overline{AC}$

$$\overline{AB} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k}, \overline{AC} = 4\bar{i} + = 6\bar{k}$$

Их векторное произведение

$$\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\right| = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\bar i - 24\bar j + 8\bar k = 4(-3\bar i - 6\bar j + 2\bar k).$$

Поэтому

$\left|\left[\overline{AB}\,\overline{AC}\right]\right| = 4\left|-3\bar i - 6\bar j + 2\bar k\right| = 4\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 4\sqrt{49} = 28$, и, следовательно $S\Delta = 14$ *кв.ед.*

ПРИМЕР. *Доказать, что векторы*

$\bar a = 2\bar i - \bar j + 2\bar k, \bar b = \bar i + 2\bar j - 3\bar k, \bar c = 3\bar i - 4\bar j + 7\bar k$ *компланарны.*

*Решение:* Вычислим смешанное произведение $\bar a\,\bar b\,\bar c$:

$$\bar a\,\bar b\,\bar c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 + 1\cdot 16 + 2\cdot(-10) = 0$$

Определитель был раскрыт разложением по первой строке. Поскольку $\bar a\,\bar b\,\bar c = 0$, векторы $\bar a, \bar b$ и $\bar c$ компланарны.

# II. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## ТЕМА 4. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

### 4.1 *Прямая на плоскости*

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть *направляющим* вектором этой прямой.

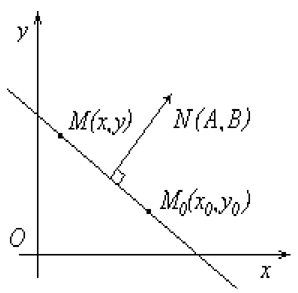



*Рис. 4.1*

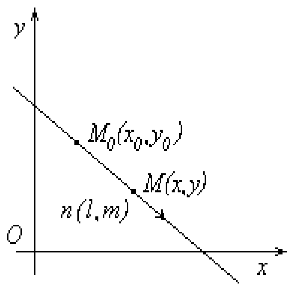



*Рис. 4.2*

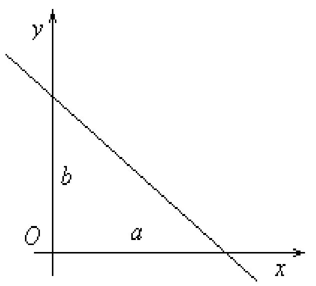



*Рис. 4.3*

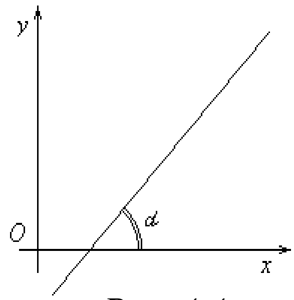



*Рис. 4.4*

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный направляющему вектору данной прямой, будем называть *нормальным* вектором этой прямой

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=(A,B)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y)$ и вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ Условием перпендикулярности прямой $MM_0$ и вектора $\overline{N}$ является равенство нулю их скалярного произведения

$$\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=(A,B)\cdot(x-x_0,y-y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

Раскроем скобки и введем обозначение: $C=-Ax_0-By_0$.

Уравнение вида $\boldsymbol{Ax+By+C=0}$ называется *общим уравнением прямой на плоскости (Рис. 4.1).*

Общее уравнение прямой называется *полным,* если все его коэффициенты $A$, $B$, $C$ отличны от нуля.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1) $C=0$, уравнение вида $Ax+By=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $B=0$, уравнение вида $Ax+C=0$ определяет прямую, параллельную оси $Oy$ (поскольку нормальный вектор $\overline{N}=(A,0)$ ортогонален оси $Oy$).

3) $A=0$, уравнение вида $By+C=0$ определяет прямую, параллельную оси $Ox$ (поскольку нормальный вектор $\overline{N}=(0,B)$ ортогонален оси $Ox$).

4) $B=0$ и $C=0$, уравнение вида $Ax=0$ определяет ось $Oy$ (в самом деле, эта прямая параллельна оси $Oy$ и проходит через начало координат).

5) $A=0$ и $C=0$, уравнение вида $By=0$ определяет ось $Ox$ (в самом деле, эта прямая параллельна оси $Ox$ и проходит через начало координат).

Рассмотрим полное уравнение прямой, так как все коэффициенты $A$, $B$, и $C$ отличны от нуля, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Обозначим $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ называется *уравнением прямой на плоскости в отрезках.*

Здесь числа $a$ и $b$ имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях $Ox$ и $Oy$ соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат) (Рис. 4.3).

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\overline{n}=(l,m)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y)$ и вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$

Условием параллельность прямой $MM_0$ и вектора $\overline{n}$ является коллинеарность векторов $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}$ или пропорциональность их координат:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Уравнение вида $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ называется *каноническим уравнением прямой на плоскости* (Рис. 4.2).

Примем за параметр *t* величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения, и выразим *x* и *y* через *t*.

Уравнение вида

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}$$

называется *параметрическим уравнением прямой на плоскости.*

Умножим каноническое уравнение прямой на m, и положим $\frac{m}{l}=k$. Получим $y-y_0=k(x-x_0)$. Обозначим через *b* постоянную $b=y_0-kx_0$

Уравнение вида $y=kx+b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* *(Рис. 4.4).*

В этом уравнении *k* обозначает угловой коэффициент данной прямой равный $k=tg\alpha$, где α угол наклона прямой к оси *Ox*. А коэффициент *b* представляет собой величину отрезка, отсекаемого данной прямой на оси *Oy*, начиная от начала координат.

### *4.2 Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой*

Пусть даны две прямые заданные общими уравнениями:

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$.

Так как $\overline{N_1}=(A_1,B_1)$ и $\overline{N_2}=(A_2,B_2)$, то угол между прямыми $L_1$ и $L_2$ равен углу между нормальными векторами к этим прямым. Из определения скалярного произведения имеем:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

*Условие параллельности прямых $L_1$ и $L_2$* эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

<u>_Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$_</u> эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих прямых, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} \text{ и } L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}.$$

Так как направляющими векторами прямых $L_1$ и $L_2$ являются вектора $\overline{n_1} = (l_1, m_1)$ и $\overline{n_2} = (l_2, m_2)$, то по аналогии получаем:

<u>_Угол между двумя прямыми_</u>: $\cos\varphi = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$.

<u>_Условие параллельности двух прямых_</u>: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.

<u>_Условие перпендикулярности двух прямых_</u>: $l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.

Пусть теперь две прямые заданы своими уравнениями через угловые коэффициенты:

$$L_1 : y = k_1x + b_1 \text{ и } L_2 : y = k_2x + b_2.$$

Если $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – углы наклона прямых $L_1$ и $L_2$ к оси $Ox$, а $\varphi$ - один из углов между этими прямыми, то $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$.

Таким образом,

$$tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

И следовательно угол между двумя прямыми $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

<u>_Условие параллельности очевидно $k_1=k_2$._</u>

<u>_Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$_</u> эквивалентно условию обращения в нуль тангенса угла между прямыми и следовательно имеет вид: <u>_$k_1k_2+1=0$. Или $k_1k_2= -1$._</u>

Для нахождения расстояния от точки $M(x_1,y_1)$ до прямой $L$, необходимо иметь общее уравнение прямой: $L : Ax + By + C = 0$. Формула для нахождения расстояния:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

_Модуль в формуле дает абсолютное значение расстояния. Применение формулы без модуля делит все точки плоскости на два класса – один с положительным_ *расстоянием, другой с отрицательным. Два класса этих точек лежат по разные стороны относительно данной прямой.*

## 4.3 *Плоскость в пространстве*

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, будем называть <u>*нормальным*</u> вектором этой плоскости.

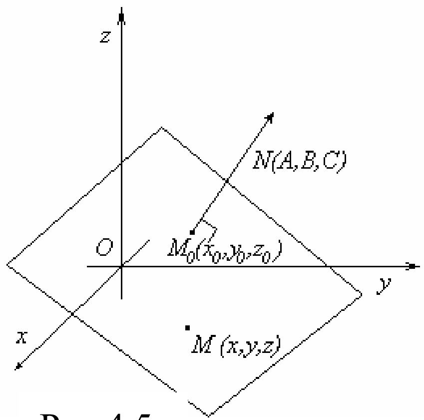



Рис.4.5

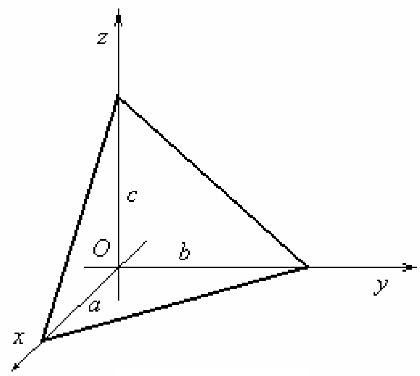



Рис.4.6

Рассмотрим вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ нормальный к плоскости, точку $M(x_0,y_0,z_0)$ через которую проходит плоскость, любую точку в плоскости $M$. Для того чтобы точка $M(x,y,z)$ принадлежала плоскости очевидно необходимо, что бы вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ был ортогонален нормали $\overline{N}$ к плоскости, следовательно их скалярное произведение должно обращаться в нуль:

$$(\overline{N} \cdot \overline{M_0M}) = (A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) =$$
$$= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Раскроем скобки и обозначим за $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$ называется <u>*общим уравнением плоскости в пространстве*</u> (Рис. 4.5).

Общее уравнение плоскости называется <u>*полным*</u>, если все его коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$ отличны от нуля.

Рассмотрим все возможные виды неполных уравнений:

1) $D=0$, уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат (поскольку координаты начала удовлетворяют этому уравнению).

2) $A=0$, уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость параллельную оси $Ox$ (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N} = (0, B, C)$ перпендикулярен оси $Ox$)

3) $B=0$, уравнение $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость параллельную оси $Oy$ (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N} = (A, 0, C)$ перпендикулярен оси $Oy$)

4) $C$=0, уравнение $Ax+By+D$=0 определяет плоскость параллельную оси $Ox$ (поскольку нормальный вектор этой плоскости $\overline{N}=(0,B,C)$ перпендикулярен оси $Ox$)

5) $A$=0, $B$=0 уравнение $Cz+D$=0 определяет плоскость параллельную координатной плоскости $Oxy$ (ибо эта плоскость параллельна осям $Ox$ и $Oy$)

6) $A$=0, $C$=0 уравнение $By+D$=0 определяет плоскость параллельную координатной плоскости $Oxz$ (ибо эта плоскость параллельна осям $Ox$ и $Oz$)

7) $B$=0, $C$=0 уравнение $Ax+D$=0 определяет плоскость параллельную координатной плоскости $Oyz$ (ибо эта плоскость параллельна осям $Oy$ и $Oz$)

8) $A$=0, $B$=0, $D$=0 уравнение $Cz$=0 определяет координатную плоскость $Oxy$ (ибо эта плоскость параллельна $Oxy$ и проходит через начало координат)

9) $A$=0, $C$=0, $D$=0 уравнение $By$=0 определяет координатную плоскость $Oxz$ (ибо эта плоскость параллельна $Oxz$ и проходит через начало координат)

10) $B$=0, $C$=0, $D$=0 уравнение $Ax$=0 определяет координатную плоскость $Oyz$ (ибо эта плоскость параллельна $Oyz$ и проходит через начало координат)

Рассмотрим полное уравнение плоскости, так как все коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ отличны от нуля, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Обозначим $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$.

Уравнение вида $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ называется <u>*уравнением плоскости в пространстве в отрезках.*</u>

Здесь числа $a$, $b$ и $c$ имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат) (Рис. 4.6).

Пусть даны две плоскости заданные общими уравнениями:

$P_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $P_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Так как $\overline{N_1}=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{N_2}=(A_2,B_2,C_1)$, то угол между прямыми $P_1$ и $P_2$ равен углу между нормальными векторами к этим плоскостям. Из определения скалярного произведения имеем:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей $P_1$ и $P_2$ эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих плоскостей, т. е. пропорциональности их координат:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей $P_1$ и $P_2$ эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ этих плоскостей, т. е. равенство нулю их скалярного произведения:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Пусть дана точка $M(x_1,y_1,z_1)$ и плоскость $L$, заданная своим общим уравнением: $L : Ax + By + Cz + D = 0$. Формула для нахождения расстояния от точки $M$ до плоскости $L$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

*Модуль в формуле дает абсолютное значение расстояния. Применение формулы без модуля делит все точки пространства на два класса – один с положительным расстоянием, другой с отрицательным. Два класса этих точек лежат по разные стороны относительно данной плоскости.*

### *4.4 Прямая в пространстве*

Рассмотрим прямую проходящую через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\overline{n} = (k, l, m)$. Рассмотрим любую точку на прямой $M(x,y,z)$ и вектор $\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ Условием параллельность прямой $MM_0$ и вектора $\overline{n}$ является коллинеарность векторов $\overline{n}$ и $\overline{M_0 M}$ или пропорциональность их координат:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Уравнение вида $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$ называется _канонически уравнением прямой в пространстве._

Примем за параметр $t$ величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения, и выразим $x$, $y$ и $z$ через $t$.

Уравнение вида

$$\begin{cases} x = kt + x_0 \\ y = lt + y_0 \\ z = mt + z_0 \end{cases}$$

называется _параметрическим уравнением прямой в пространстве_.

Пусть две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$L_1 : \dfrac{x-x_1}{k_1} = \dfrac{y-y_1}{l_1} = \dfrac{z-z_1}{m_1}$ и $L_2 : \dfrac{x-x_2}{k_2} = \dfrac{y-y_2}{l_2} = \dfrac{z-z_2}{m_2}$.

Так как направляющими векторами прямых $L_1$ и $L_2$ являются вектора $\overline{n_1} = (k_1, l_1, m_1)$ и $\overline{n_2} = (k_2, l_2, m_2)$, то по аналогии со случаем прямой на плоскости получаем:

<u>*Угол между двумя прямыми*</u>**:** $\cos\varphi = \dfrac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}}$**.**

<u>*Условие параллельности двух прямых:*</u> $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$**.**

<u>*Условие перпендикулярности двух прямых:*</u> $k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$**.**

### *4.5 Прямая и плоскость в пространстве*

Пусть заданы прямая $L$ и плоскость $P$ в пространстве своими уравнениями

$\dfrac{x-x_0}{k} = \dfrac{y-y_0}{l} = \dfrac{z-z_0}{m}$ и $Ax+By+Cz+D=0$

Направляющий вектор прямой имеет координаты $\overline{n} = (k, l, m)$, нормальный вектор плоскости - $\overline{N} = (A, B, C)$.

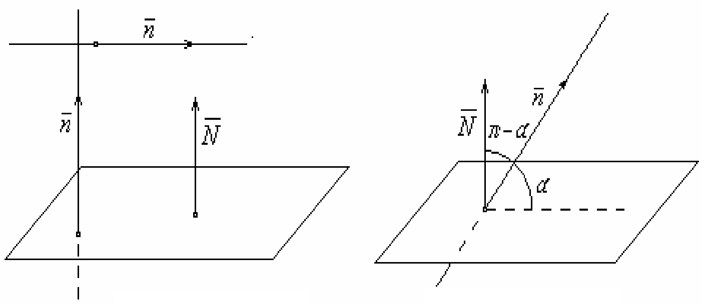



Рис. 4.7 Рис. 4.8

<u>*Условием параллельности прямой и плоскости*</u> является перпендикулярность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой**:** $Ak + Bl + Cm = 0$

<u>*Условием перпендикулярности прямой и плоскости*</u> является коллинеарность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой: $\dfrac{A}{k} = \dfrac{B}{l} = \dfrac{C}{m}$.

<u>*Углом между прямой и плоскостью*</u> называется угол между направляющим вектором прямой $L$ и проекцией этого вектора на плоскость $P$.

Очевидно, что угол между прямой и плоскостью есть дополнительный угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, и следовательно для вычисления угла между прямой и плоскостью можно использовать формулу:

$$\sin\alpha = \frac{kA + lB + mC}{\sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ПРИМЕР. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку*

*M(2; 3; -4) и параллельной плоскости yOz.*

*Решение:* Уравнение плоскости, параллельной *yOz,* имеет вид:

$Ax + D = 0;$

подставляя в него координаты точки *M,* получим:

$A \cdot 2 + D = 0, D = -2A.$

Следовательно, искомое уравнение:

$Ax - 2A = 0,$ *или* $x - 2 = 0.$

ПРИМЕР. *Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью*

*x + 2y - 3z + 2=0 и координатными плоскостями.*

*Решение:* Объем пирамиды, ограниченной какой-либо плоскостью и координатными плоскостями, равен $\frac{1}{3}Sh$, где S—площадь основания (треугольника $OM_1M_2$), $h = |OM_3|$ - — высота пирамиды. Если даны числа *a, b, c,* то

$$S = \frac{1}{2}|a||b|, h = |c|*,$$

следовательно, $V_{пир} = \frac{1}{6}|a||b||c| = \frac{1}{6}|abc|.$

Приведем уравнение данной плоскости к виду уравнения в отрезках. Для этого перенесем свободный член вправо и разделим на него

$$x + 2y - 3z = -2,$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{2y}{-2} + \frac{3z}{-2} = 1,$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{\frac{2}{3}} = 1.$$

Отсюда следует, что *a* = - 2, b= - 1, c = 2/3 |abc| =3/4 ,

поэтому

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{9} куб.ед.$$

ПРИМЕР. *Провести плоскость, параллельную данной плоскости $x + y + z - 1=0$ и оотстоящей от нее на 3 ед. длины.*

<u>*Решение:*</u> Приведем данное уравнение к нормальному виду, умножив на $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

Искомая плоскость есть геометрическое место точек M(x, y, z), для которых $d=|\delta|=\sqrt{3}$, поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

откуда получаем

$x + y + z – 4 = 0$ и $x + y + z + 2= 0$.

Эти две плоскости удовлетворяют условию задачи.

ПРИМЕР. *Установить, что плоскости*

$x-y-z-10=0$, 4x+11z+43=0 и 7x-5y-31=0

*имеют единственную общую точку. Найти ее.*

<u>*Решение:*</u> Выпишем координаты векторов $\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3$:

$$\bar{N}_1\{1,-1,-1\}, \bar{N}_2\{4,0,11\}, \bar{N}_3\{7,-5,0\}$$

и вычислим их смешанное произведение

$$\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 4 & 0 & 11\\ 7 & -5 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Так как $\bar{N}_1\bar{N}_2\bar{N}_3\neq 0$, то три данные плоскости пересекаются только в одной точке. Чтобы найти ее, перепишем данные уравнения, перенеся свободные члены вправо

$$\begin{cases} x-y-z=10,\\ 4x+11z=-43,\\ 7x-y=31.\end{cases}$$

И примем для решения этой системы формулы Крамера. Ранее найдено $\Delta$=-2. Далее,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -43 & 0 & 11 \\ 31 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 4 & -43 & 11 \\ 7 & 31 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & -43 \\ 7 & -5 & 31 \end{vmatrix} = 10.$$

Поэтому

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3,$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5.$$

Итак данные три плоскости имеют общую точку *P(3; -2; -5)*.

ПРИМЕР. *Даны точки $M_1$ и $M_2$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \overline{M_1M_2}$. $M_1$ (-3;7;-5), $M_2$ (-8;3;-4).*

<u>*Решение:*</u> Найдем координаты $\vec{n}$ . $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

$\vec{n} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \Rightarrow \vec{n} = (-5; -4; 1)$.

Уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

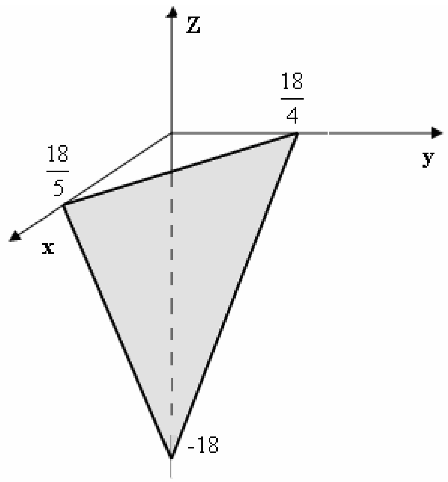
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$-5(x+3) - 4(y-7) + (z+5) = 0 \Rightarrow 5x + 4y - z - 18 = 0.$$

ПРИМЕР. *Найти отрезки, отсекаемые данной плоскостью на осях координат. Начертить эту плоскость.*

*Уравнение плоскости в отрезках:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

<u>*Решение*</u>:



$$5x+4y-z=18 \Rightarrow \frac{5x}{18}+\frac{4y}{18}+\frac{z}{-18}=1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{18}{5}}+\frac{y}{\frac{18}{4}}+\frac{z}{-18}=1 \Rightarrow$$

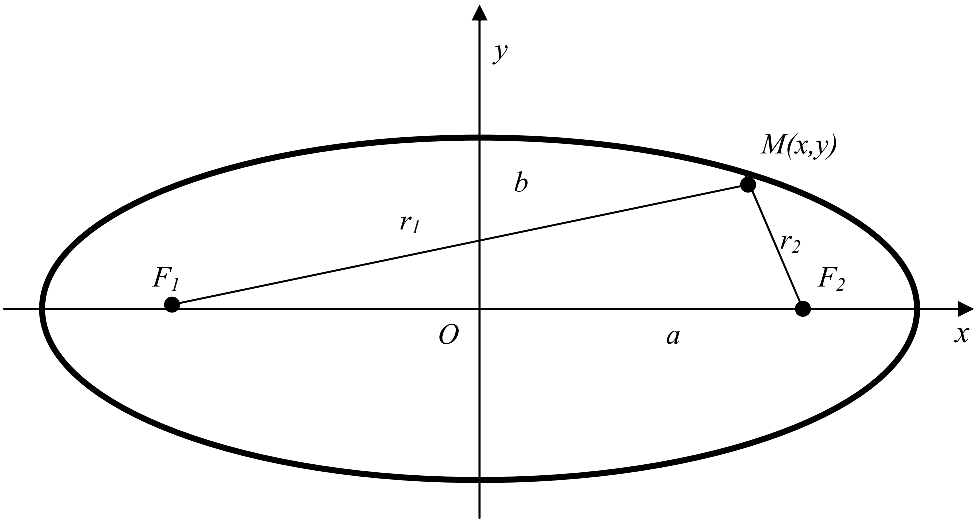
$$a=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}; b=\frac{18}{4}=4\frac{1}{2}; c=-18.$$

# ТЕМА 5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## *5.1 Эллипс*

*Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированный точек $F_1$ и $F_2$ этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Для вывода уравнения выберем точки $F_1$ и $F_2$ лежащими на оси $Ox$, так что, точка $O$ - начало координат лежит на середине отрезка $F_1F_2$. Пусть длина отрезка $F_1F_2$ равна $2c$. Тогда точки $F_1$ и $F_2$ имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении эллипса. Очевидно, $2a>2c$, т.е. $a>c$. Пусть $M$ – точка плоскости с координатами $(x,y)$. Обозначим через $r_1$ и $r_2$ расстояние от точки $M$ до точек $F_1$ и $F_2$ соответственно. Согласно определению эллипса равенство $r_1 + r_2 = 2a$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данном эллипсе.




Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *называется каноническим уравнением эллипса*.

Величины *a и b* называют соответственно большой и малой полуосями эллипса.

Величина

$$\acute{\varepsilon}=\frac{c}{a}<1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, так как выражается через отношение его полуосей:

$$\acute{\varepsilon}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a=b$, т. е. $\acute{\varepsilon}=0$.

ПРИМЕР. *Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса* $9x^2+4y^2=36$.

<u>*Решение:*</u> Разделив на 36, приведём данное уравнение к виду:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отсюда следует, то большая полуось эллипса $a=3$,а малая полуось $b=2$.

При этом большая ось эллипса и его фокусы расположены на оси $Oy$

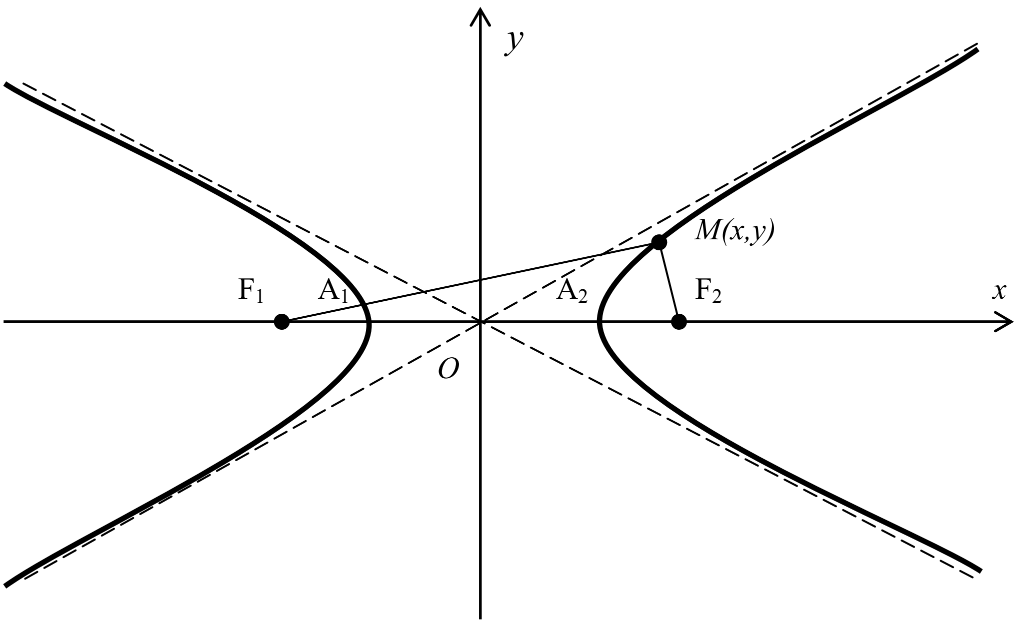
Найдём $c$ по формуле $c=\sqrt{a^2-b^2}$ :

$$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}\ .$$

Следовательно, координаты фокусов $F_1(0;-\sqrt{5})$ и $F_2(0;\sqrt{5})$, а его эксцентриситет $\acute{\varepsilon}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

### *5.2 Гипербола*

<u>*Гиперболой*</u> называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированный точек $F_1$ и $F_2$ этой плоскости, называемых <u>*фокусами*</u>, есть величина постоянная.




Для вывода уравнения выберем точки $F_1$ и $F_2$ лежащими на оси $Ox$, так что, точка $O$ - начало координат лежит на середине отрезка $F_1F_2$. Пусть длина отрезка $F_1F_2$ равна $2c$. Тогда точки $F_1$ и $F_2$ имеют координаты $(-c,0)$ и $(c,0)$ соответственно. Обозначим через $2a$ постоянную, о которой говорится в определении гиперболы.

Очевидно, 2$a$<2$c$, т.е. $a$<$c$. Пусть $M$ – точка плоскости с координатами ($x$,$y$). Обозначим через $r_1$ и $r_2$ расстояние от точки $M$ до точек $F_1$ и $F_2$ соответственно. Согласно определению эллипса равенство $|r_1 - r_2| = 2a$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данной гиперболе. Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ получим: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *называется каноническим уравнением гиперболы.*

Величины $a$ и $b$ называют соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет гиперболы,

$y_1 = \frac{b}{a}x$; $y_2 = -\frac{b}{a}x$ –асимптоты гиперболы.

ПРИМЕР. *По заданному уравнению гиперболы найти: координаты вершин, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнение асимптот.*

*Решение:* Гипербола задана уравнением: $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$, приведем

уравнение к виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ *где* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ – фокусы гиперболы; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет гиперболы;

$y_1 = \frac{b}{a}x$; $y_2 = -\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы;

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow$ $a=3;\ b=4;\ c=5;\ F_1(-5;0);\ \ F_2(5;0);$

$\varepsilon = \frac{5}{3};\ y = \frac{4x}{3}$ и $y = -\frac{4}{3}x.$

### 5.3 Парабола

*Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки $F$ равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости. Точка $F$ называется фокусом параболы, прямая – директрисой параболы.

Для вывода уравнения выберем точки $F$ и $D$ лежащими на оси $Ox$, так что, точка $O$ - начало координат лежит на середине отрезка $FD$. Пусть длина отрезка $FD$ равна $p$. Тогда точка $F$ имеет координаты $(\frac{p}{2},0)$. Через точку $D$ проведем прямую перпендикулярно оси $Ox$. Пусть $M$ – точка плоскости с координатами ($x$,$y$). Обозначим через $r$ и $d$ расстояние от точки $M$ до точки $F$ и директрисы соответственно. Согласно определению параболы равенство $r = d$ является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x,y)$ на данной параболе.

Используя формулу расстояния между двумя точками, получим:

$$r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\ , \quad d = \frac{p}{2} + x$$

Согласно определению:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x\ ,$$

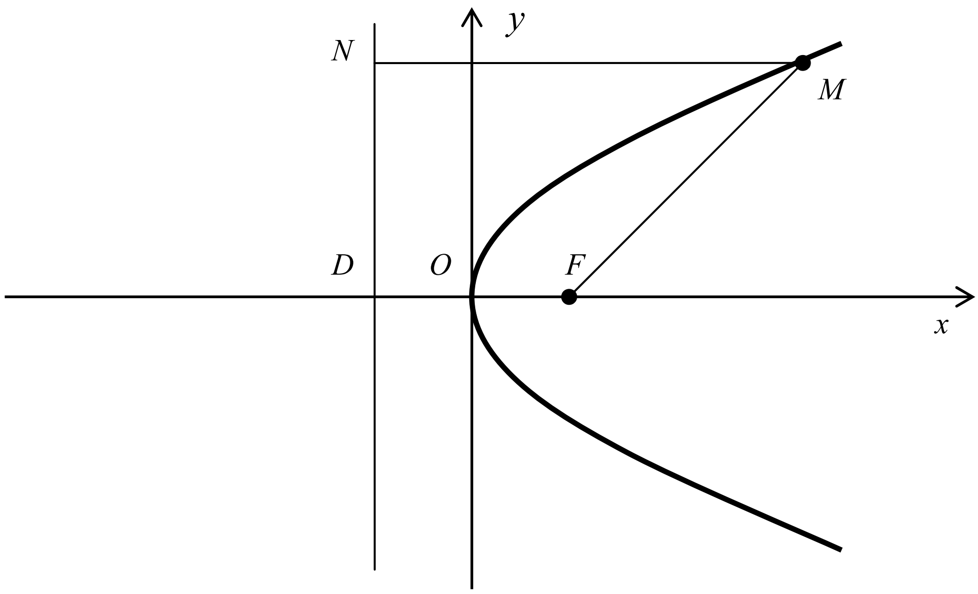
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2\ ,$$

и окончательно получим:

$$y^2 = 2px\ .$$

Уравнение $y^2 = 2px$ *называется каноническим уравнением параболы.*

Величина $p$ называется параметром параболы.




ПРИМЕР. *Показать, что уравнение представляет собой уравнение параболы, найти: вершину, ось, директрису параболы.*

*Решение:* Парабола задана уравнением $2x^2 - 12x + y + 13 = 0$. Каноническое уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берут ось параболы, а за другую – ось, перпендикулярную оси параболы и проходящую через вершину.

Приведем уравнение к каноническому виду $y = -2x^2 + 12x - 13 \Rightarrow$

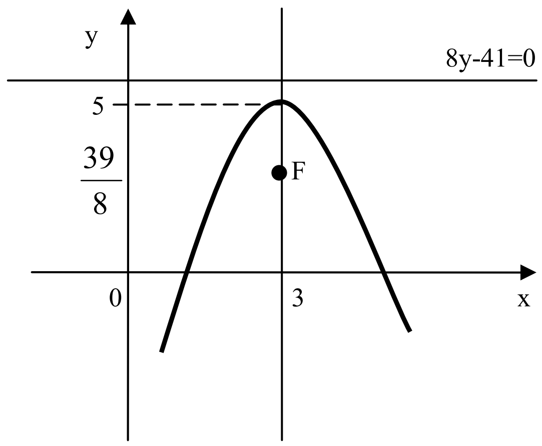
$y=-2\left(x^2-6x+\frac{13}{2}\right)\Rightarrow y=-2(x-3)^2+5\Rightarrow y-5=-2(x-3)^2\Rightarrow -\frac{1}{2}(y-5)=(x-3)^2.$

Положим $y'=y-5; x'=x-3\Rightarrow -\frac{1}{2}y'=x'^2\Rightarrow$ т. е. 2p=$\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{p}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow$ F(0;- $\frac{p}{2}$); F(0;-$\frac{1}{8}$).

$y'=\frac{1}{8}$ - директриса, $O'(3;5)$- вершина параболы.

Вернемся к старой системе координат: y $=y'+5\Rightarrow -\frac{1}{8}+5=\frac{39}{8}\Rightarrow F\left(3;\frac{39}{8}\right)$; $x=x'+3=3$.

Уравнение директрисы: y – 5 =$\frac{1}{8}\Rightarrow$8y – 41 = 0.




## 5.4 *Линии второго порядка*

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка:

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

Если точки, удовлетворяющие данному уравнению образуют геометрическую линию, то данная линия называется <u>*линией второго порядка.*</u>

Эллипс, гипербола, парабола являются линиями второго порядка.

Группа слагаемых $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ называется группой старших членов или квадратичной формой.

Группа слагаемых $2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ называется линейной частью уравнения второго порядка.

<u>*Инвариантом уравнения линии второго порядка*</u> относительно преобразований декартовой системы координат называется такая функция $f(a_{11},a_{12},...,a_{33})$ от коэффициентов $a_{ij}$ этого уравнения, значения которой не меняется при переходе к новой декартовой прямоугольной системе координат.

Таким образом, если $f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33})$ инвариант и $a'_{ij}$ - коэффициенты уравнения линии второго порядка в новой системе декартовых координат, то

$$f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}) = f(a'_{11}, a'_{12}, ..., a'_{33})$$

ТЕОРЕМА 1. Величины

$$I_1 = a_{11} + a_{22}\,,\ I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

ТЕОРЕМА 2. В случае $I_2$=0 и $I_3$=0, величина

$$I'_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

так же будет инвариантом уравнения линии второго порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

Величина $I'_3$ называется семиинвариантом уравнения линии второго порядка.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

| N | Признак линии | Наименование | Каноническое уравнение |
|---|---|---|---|
| 1. | $I_2 > 0,\ I_1 I_3 < 0$ | Эллипс | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| 2. | $I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ | Мнимый эллипс | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ |
| 3. | $I_2 > 0,\ I_3 = 0$ | Две мнимые пересекающиеся прямые | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ |
| 4. | $I_2 < 0,\ I_3 \neq 0$ | Гипербола | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ |
| 5. | $I_2 < 0,\ I_3 = 0$ | Две пересекающиеся прямые | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| 6. | $I_2 = 0,\ I_3 \neq 0$ | Парабола | $x^2 = 2py$,<br>$y^2 = 2px$ |
| 7. | $I_2 = 0,\ I_3 = 0,$<br>$I'_3 < 0$ | Две параллельные прямые | $x^2 = a^2$,<br>$y^2 = a^2$ |
| 8. | $I_2 = 0,\ I_3 = 0,$<br>$I'_3 > 0$ | Две мнимые параллельные прямые | $x^2 = -a^2$,<br>$y^2 = -a^2$ |
| 9. | $I_2 = 0,\ I_3 = 0,$<br>$I'_3 = 0$ | Две совпадающие прямые | $x^2 = 0$,<br>$y^2 = 0$ |

# III. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## ТЕМА 6. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

*Число А называется пределом функции y=f(x), при $x \to x_0$*, (или в точке $x_0$), если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется такое положительное число $\delta$, что при всех $|x-x_0|> \delta$, выполняется неравенство: $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Это означает, что при всех значениях $x$, достаточно близких к $\mathbf{x_0}$, значения функции $y=f(x)$ очень мало отличаются по абсолютной величине от числа $A$ (меньше, чем на число $\varepsilon$, каким бы малым оно не было).

### *6.1 Теоремы о пределах*

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при $x \to x_0$ или $x \to \infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)=A$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} \varphi(x)=B$ то для них справедливы следующие утверждения:

1. *Функция не может иметь более одного предела.*

2. *Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\big(f(x)\pm\varphi(x)\big)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\pm B$$

3. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\cdot B$$

4. *Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)}=\frac{A}{B}$$

5. *Если* $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, *то предел сложной функции* $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[\varphi(x)\right]=A$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x+1}{x-3}$

Решение:

Используем теорему о пределах, согласно которой предел суммы, разности, произведения и частного равен соответственно сумме, разности, произведению и частному пределов:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}2\cdot\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}1}{\lim\limits_{x\to 5}x-\lim\limits_{x\to 5}3}=\frac{2\cdot 5+1}{5-3}=\frac{11}{2}.$$

### *6.2 Бесконечно малые величины*

*Функция f(x) называется бесконечно малой величиной, если при* $x\to x_0$ *или* $x\to\infty$ *ее предел равен нулю:* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ *или* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

*Свойства бесконечно малых величин:*

1. Сумма бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая.

3. Частое от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

ПРИМЕР. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x})$

Решение:

Выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой произведение бесконечно малой функции $(x\to 0)$ и ограниченной функции $(\sin\frac{1}{x})$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0.$$

*Предел отношения двух бесконечно малых величин* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\to\infty}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

- *может быть равен нулю, тогда α(x) называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β(x); может быть равен числу A, не равному нулю, тогда α(x) и β(x) имеют одинаковый порядок малости;*
- *может быть равен бесконечности, тогда α(x) называется бесконечно малой более низкого порядка, чем β(x);*

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Решение:

При $x \to -2$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, следовательно имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поэтому непосредственно теорему о пределах применить нельзя. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на множитель $(x+2)$:

$x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2) = x(x+2)(x+1)$;

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x\cdot(x+1)}{(x-3)}$$

Теперь числитель не обращается в ноль, а стремится к 2. Знаменатель стремится к -5. Поэтому

$$\lim_{x\to -2}\frac{x(x+1)}{(x-3)} = \frac{\lim\limits_{x\to -2} x(x+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-3)} = -\frac{2}{5}.$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$

Решение:

Чтобы избавиться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$, умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю.

Тогда в числителе можно применить формулу квадрата разности и после преобразований произвести сокращение на множитель $(x-2)$, который обращает в нуль числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{1-x})^2}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1+x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

### *6.3 Бесконечно большие величины*

*Функция f(x) называется* <u>*бесконечно большой величиной*</u> *если для любого, даже сколь угодно большого числа M>0, найдется такое число δ>0, что для всех* $|x-x_0|>\delta$, *выполняется неравенство:* $|f(x)|>M$.

*<u>Свойства бесконечно больших величин:</u>*

1. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

2. Произведение бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

3. Частое от деления бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

4. Если функция α(x) - бесконечно малая величина при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть величина бесконечно большая величина при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, и наоборот.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

*<u>Решение:</u>*

При любом значении $x$ функция $\cos x$ будет ограниченной, т.к. $|\cos x| \le 1$. При делении ее на бесконечно большую величину $x \to \infty$ получаем бесконечно малую величину, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} \cos x}{\lim\limits_{x\to\infty} x} 0$.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 6x + 5}$

*<u>Решение:</u>*

В данном случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поведение числителя и знаменателя при $x \to \infty$ будут определяться членами с наибольшими показателями степеней. Поэтому разделим числитель и знаменатель дроби на $x$ с наибольшим показателем степени, т.е. на $x^3$ и используем теоремы о пределах:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 6x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{7}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{6x}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{1 + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x^2} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 0.$$

Используя этот прием, нетрудно показать, что если числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, представляют собой многочлены некоторых степеней $x$, то всегда при $x \to \infty$.

*1. Если максимальная степень x в знаменателе больше максимальной степени x в числителе, то такой предел будет равен нулю.*

*2. Если максимальная степень x в числителе больше максимальной степени x в знаменателе, то такой предел будет равен бесконечности.*

*3. Если наибольшие степени числителя и знаменателя равны, то предел будет равен отношению коэффициентов при этих степенях.*

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^4+3x+6}{4x^4+x^2+1}$

<u>*Решение:*</u>

На основании сформулированного выше правила находим, что максимальная степень $x^3$ в числителе и в знаменателе. Поэтому данный предел будет равен отношению коэффициентов при этих степенях:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3+3x+6}{4x^3+x^2+1}=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}.$$

Если под знаком предела стоит неопределенность какого-либо другого вида, кроме $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, то ее следует каким-либо образом свести к одной из этих двух неопределенностей.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)$

<u>*Решение*</u>*:* Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Для ее раскрытия умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{x+\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+9}{x+\sqrt{x^2-9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x+9}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}9}{\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-9}}=\frac{9}{\infty}=0$$

В теории пределов рассматривают два замечательных предела.

### *6.4 Первый замечательный предел*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$.

<u>*Решение:*</u>

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Используем первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Для этого преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, умножив и разделив его на $4x$ (в квадратных скобках выделено выражение, соответствующее первому замечательному пределу):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\cdot\frac{4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\cdot 2=2\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]=2\cdot 1=2.$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^2 x}$.

*Решение:*

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Используем тот же прием, что и в предыдущем примере, для числителя и знаменателя в отдельности. Учтем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x^3}{x^3}\right]\cdot\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right]\cdot\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(x)=(1\cdot 1^2)\cdot 0=0$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$.

*Решение:*

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, используем тригонометрическое представление $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. При $x\to 0,\quad \cos x\to 1$, следовательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^3}$.

*Решение:*

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Используем формулы тригонометрии, чтобы свести к первому замечательному пределу: $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{5x}$.

<u>*Решение:*</u>

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сделаем замену: $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{5x} = \frac{1}{5}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

### *6.5 Второй замечательный предел*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

где ***е*** – число Эйлера.

Второй замечательный предел можно так же записать в виде:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ПРИМЕР.

*Вычислить:* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{6x}$.

<u>*Решение:*</u>

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1;$ $\lim\limits_{x\to\infty} 6x = \infty$, то в данном случае имеем неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Для ее раскрытия используем второй замечательный предел. Преобразуем показатель степени, умножив и разделив ее на $\frac{x}{3}$ (в квадратных скобках будет выделен второй замечательный предел):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{6x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3}{x}\cdot 6x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}\cdot 6x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 18} = e^{18}.$$

Переход предела в показатель экспоненты обусловлен непрерывностью показательной функции.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{x-3}$.

<u>*Решение:*</u>

Чтобы свести ко второму замечательному пределу, выделим у дроби, стоящей под знаком предела, целую часть и преобразуем показатель степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-2}{x-1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x-1}\right)^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)}\right]^{-\left(\frac{2}{x-1}\right)\cdot(x-3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\left(\frac{2}{x-1}\right)\cdot(x-3)\right)}=e^{-2}.$$

Обратите внимание на знак минус, который появляется в показателе степени, так как второе слагаемое в скобке и показатель степени должны быть одного знака.

ПРИМЕР.

*Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}$.

<u>*Решение:*</u>

Имеем неопределенность вида $(1^{\infty})$. Сведем это выражение ко второму замечательному пределу в виде $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ . Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot(-5x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot(-5x)}=e^{-10}.$$

## ТЕМА 7. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

<u>*Производной функции y=f(x)*</u> называется предел отношения приращения функции к приращению независимого аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Обозначается: $y'$; $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df(x)}{dx}$.

*Нахождение производной функции называется дифференцированием.*

*Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ - есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой y=f(x) в точке $x_0$ :* $k=f'(x_0)$.

### *7.1 Основные правила дифференцирования*

1. Производная постоянной величины равна 0:

$C'=0 \quad (C=const)$

2. Производная аргумента равна 1:

$x' = 1$Производная алгебраической суммы (или разности) конечного числа дифференцируемых функций равна сумме (или разности) производных этих функций:

$(u + v)' = u' + v'$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$

6. Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции* $y = \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^4} + \sqrt{x} - \sqrt[5]{x}\right)$.

<u>*Решение:*</u>

Производная от суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций. Производную от каждого из слагаемых будем брать как производную от степенной функции: $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$. Учтем, что постоянный множитель выносится за знак производной. Поэтому

$$y' = \left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^4} + \sqrt{x} - \sqrt[5]{x}\right)' = \left(3x^{-1}\right)' - \left(5x^{-4}\right)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = -3x^{-2} - 5\cdot(-4x^{-5}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} =$$

$$= -\frac{3}{x^2} + \frac{20}{x^5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции.* $y = \left(e^x + 5\cos x\right)\cdot\sqrt[3]{x}$.

*Решение:*

Применяем формулу для производной от произведения функций: $\left(u\cdot v\right)' = u'\cdot v + v'\cdot u$, при этом учитываем, что: $\left(e^x\right)' = e^x$; $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

$$y' = \left(\left(e^x + 5\cos x\right)\cdot\sqrt[3]{x}\right)' = \left(e^x + 5\cos x\right)'\cdot\sqrt[3]{x} + \left(e^x + 5\cos x\right)\cdot(\sqrt[3]{x})' = (e^x - 5\sin x)\cdot\sqrt[3]{x} +$$

$$+ \left(e^x + 5\cos x\right)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции.* $y = \dfrac{3^x - 5}{\sin x}$.

*Решение:*

Применяем формулу производной частного двух функций: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$.

Учитываем, что производная показательной функции $\left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a$:

$$y' = \left(\frac{\left(3^x - 5\right)}{\sin x}\right)' = \frac{\left(3^x - 5\right)'\cdot\sin x - \left(3^x - 5\right)\cdot\left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2} = \frac{3^x\cdot\ln 3\cdot\sin x - \left(3^x - 5\right)\cdot\cos x}{\left(\sin x\right)^2}.$$

## *7.2 Производная сложной функции*

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u*, *y=f(u)*. И пусть переменная *u* есть функция от переменной *x*, *u=φ(x)*. Таким образом, задана сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$.*Если y=f(u) , u=φ(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной:*

$$y' = f'(u)\cdot u'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

## ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции* $y = \sqrt[4]{ctg^3 x}$.

*Решение:*

В нашем случае можно заданную функцию представить как $y = u^{\frac{3}{4}}$, где $u = ctgx$. Тогда на основании этого правила сначала берем производную от степенной функции, а затем от котангенса:

$$y' = \left(\sqrt[4]{ctg^3 x}\right)' = \left(ctg^{\frac{3}{4}} x\right)' = \left(u^{\frac{3}{4}}\right)' \cdot u' = \frac{3}{4} u^{-\frac{1}{4}} \cdot u' = \frac{3}{4} ctg^{-\frac{1}{4}} x \cdot (ctgx)' = -\frac{3}{4} ctg^{-\frac{1}{4}} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}.$$

(Здесь учли также, что $(ctgx)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$).

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции:* $y = e^{tg\left(-\frac{1}{x}\right)}$.

*Решение:*

В данном случае также имеем сложную функцию, которую можно представить так: $y = e^u$, где $u = tg\left(-\frac{1}{x}\right)$ - тоже является сложной функцией: $u = tgv$ и $v = -\frac{1}{x}$. Поэтому сначала берем производную от экспоненциальной функции, затем от тангенса, и, наконец, от $\left(-\frac{1}{x}\right)$ и результаты этого дифференцирования перемножаем:

$$y' = \left(e^{tg\left(-\frac{1}{x}\right)}\right)' = e^{tg\left(-\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' = e^{tg\left(-\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2}$$

ПРИМЕР.

*Вычислить производную функции* $y = \frac{\ln(tgx)}{e^{1-2x}}$.

*Решение:*

Используем формулу производной частного двух функций, учтем, что и числитель и знаменатель являются сложными функциями:

$$y' = \left(\frac{\ln(tgx)}{e^{1-2x}}\right)' = \frac{(\ln(tgx))' \cdot e^{1-2x} - \ln(tgx) \cdot \left(e^{1-2x}\right)'}{\left(e^{1-2x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{tgx} \cdot (tgx)' e^{1-2x} - \ln(tgx) \cdot e^{1-2x} \cdot (1-2x)'}{\left(e^{1-2x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{1-2x} + 2 \cdot \ln(tgx) \cdot e^{1-2x}}{\left(e^{1-2x}\right)^2} = \frac{\cdot \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} + 2 \cdot \ln(tgx)}{e^{1-2x}}$$

### *7.3 Производная функции, заданной параметрически*

Если функция, задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ее производная находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Таким образом, сначала вычисляются производные $y'_t$ и $x'_t$, а затем находится их отношение.

ПРИМЕР.

*Найти производную функции, заданной параметрически:* $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctg(t) \end{cases}$.

*Решение:*

$$y'_t = (t - arctg(t))' = 1 - \frac{1}{1+t^2}; \quad x'_t = \left(\ln(1+t^2)\right)' = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t$$

Тогда: $y'_x = \dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t} = \dfrac{\dfrac{1+t^2-1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{t^2}{2t} = \dfrac{t}{2}$.

### *7.4 Производные высших порядков*

*<u>Производной n –го порядка</u> называется производная от производной (n-1) –го порядка.*

*Обозначается:*

$f''(x)$ - производная второго порядка;

$f'''(x)$ - производная третьего порядка; $f^{(4)}(x)$ - производная четвертого порядка; $f^{(n)}(x)$ - производная n -го порядка;

ПРИМЕР.

*Найти производную второго порядка от функции:* $y = 5^{\sqrt{x}}$.

*<u>Решение:</u>*

Чтобы найти производную второго порядка от некоторой функции, нужно сначала взять первую производную от этой функции, и затем еще раз продифференцировать полученный результат:

$y'' = (y')'$.

Вычисляем первую производную, как производную сложной функции, где $y = 5^u$ и $u = \sqrt{x}$. Следовательно

$$y' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = 5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

Теперь полученное выражение дифференцируем еще раз, чтобы найти $y''$ (учтем, что на этот раз придется вычислять производную от произведения двух функций: показательной и степенной):

$$y'' = \left(5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \ln 5 \cdot \left[\left(5^{\sqrt{x}}\right)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 5^{\sqrt{x}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln 5 \cdot \left[5^{\sqrt{x}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 5^{\sqrt{x}} \cdot x^{-\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{4} \cdot \ln 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot \left[\ln 5 \cdot x^{-1} - x^{-\frac{3}{2}}\right]$$

# ТЕМА 8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

## *8.1 Достаточные условия возрастания и убывания функции*

*Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.*

*Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.*

Промежутки возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности* данной функции.

*Экстремум функции.*

*Точка $x_0$ называется точкой максимума функции f(x), если в некоторой окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.*

*Точка $x_1$ называется точкой минимума функции f(x), если в некоторой окрестности точки $x_1$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_1)$. Значения функции в точках $x_0$ и $x_1$ называются соответственно точками максимума и минимума.*

*Необходимое условие экстремума:* Для того, чтобы функция *y=f(x)* имела экстремум в точке $x_0$, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются критическими или стационарными.

*Достаточное условие экстремума:* Если при переходе через точку $x_0$ производная дифференцируемой функции *y=f(x)* меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ есть точка максимума, а если с плюса на минус, то $x_0$ есть точка минимума.

## *8.2 Выпуклость функции*

*Функция y=f(x) называется выпуклой вниз (вогнутой) на промежутке X, если для любых $x_1$, $x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

*Функция y=f(x) называется выпуклой вверх на промежутке X, если для любых $x_1$, $x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство:*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Функция выпукла вверх (вниз) на промежутке X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).

### *8.3 Точки перегиба*

*Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, на которых функция выпукла вверх и вниз.*

*Необходимое условие перегиба:* Вторая производная дифференцируемой функции в точке перегиба $x_0$ равна нулю: $f''(x_0)=0$.

*Достаточное условие перегиба:* Если вторая производная дифференцируемой функции в точке $x_0$ меняет свой знак, то $x_0$ - точка перегиба ее графика.

### *8.4 Асимптоты графика функции*

*Асимптотой графика функции y=f(x) называется прямая, такая, что расстояние от точки (x,f(x)) до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении точек графика от начала координат.*

*Вертикальные асимптоты:* Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ (исключая, может быть, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при $x\to x_0-0$ (слева), или $x\to x_0+0$ (справа), равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$$

тогда прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Вертикальные асимптоты $x=x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y=f(x)$ или на концах ее области определения $(a,b)$, если $a$ и $b$ – конечные числа.

*Горизонтальные асимптоты:* Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших $x$ и существует конечный предел функции $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, Тогда прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

*Наклонные асимптоты:* Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших $x$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=b$$

Тогда прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

**_Алгоритм исследования функции_**

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и периодичность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции на бесконечности и найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и дополнительные точки, уточняющие график.
8. Построить график функции.

ПРИМЕР.

*Исследовать функцию* $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ *и построить ее график.*

*Решение:*

Используем схему исследования функции:

1. Находим область определения функции.

Функция $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ определена на всем множестве вещественных чисел, кроме тех значений, при которых знаменатель этой функции обращается в ноль: $x=1$ и $x=-1$. Следовательно, областью определения этой функции будет объединение интервалов:

$$(-\infty\,;-1)\cup(-1\,;1)\cup(1\,;+\infty).$$

2. Исследуем функцию на четность.

$$f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$$

Таким образом, данная функция является четной, следовательно ее график будет симметричен относительно оси ординат.

3. Находим вертикальные асимптоты к графику функции.

Вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции $x=1$ и $x=-1$. Сначала рассмотрим точку $x=1$. Если хотя бы один из пределов этой функции при $x\to1$ слева и справа равен бесконечности, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

При $x\to1$ слева: $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=+\infty$

При $x\to1$ справа: $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-\infty$

Таким образом, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Аналогично можно проанализировать $x=-1$. Но, поскольку график функции симметричен относительно оси ординат, то, очевидно, что прямая $x=-1$ тоже будет вертикальной асимптотой.

4. Исследуем поведение функции на бесконечности. Определим горизонтальные и наклонные асимптоты.

Для этого найдем пределы функции при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1.$$

Следовательно, прямая $y=-1$ является горизонтальной асимптотой.

Для того, чтобы найти наклонные асимптоты, нужно исследовать предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. Если он существует и равен конечной величине $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, а также существует конечный предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$, то прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой. В нашем случае:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}=\infty.$$

Конечного предела не существует, следовательно, наклонных асимптот у графика функции $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ нет.

5. Найдем экстремумы и интервалы монотонности функции.

Для этого вычислим первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

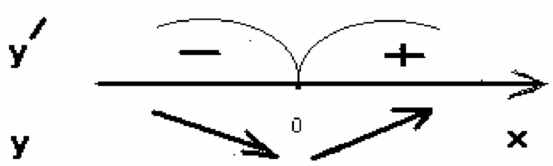
Найдем значения $x$, при которых производная $y'$ обращается в ноль или не существует:

$$y'=\frac{4x}{(1-x^2)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0.$$

Производная не существует в точках $x=1$ и $x=-1$, но эти точки не входят в область определения функции. Поэтому критической является только точка $x=0$. Если в этой точке производная функции меняет знак, то эта точка будет точкой экстремума функции. Исследуем поведение производной при переходе через эту точку.

На промежутке $(-\infty;0)$ первая производная $y'<0$, следовательно, функция $y$ на этом промежутке убывает.

На промежутке $(0;+\infty)$ производная $y'>0$, следовательно, функция $y$ на этом промежутке возрастает.



Поскольку в точке $x=0$ функция меняет знак с минуса на плюс, то точка $x=0$ является точкой минимума.

6. Находим интервалы выпуклости и точки перегиба функции.

Для этого вычисляем вторую производную:

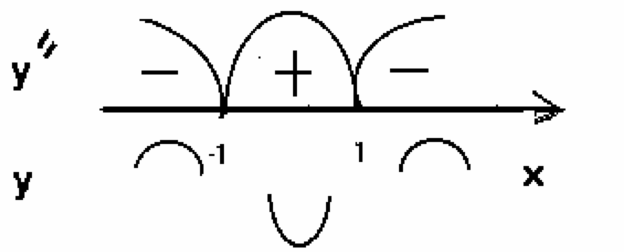
$$y''=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot\left((1-x^2)^2\right)'}{(1-x^2)^4}=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3}=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Исследуем поведение второй производной. Точек, в которых вторая производная обращается в ноль, нет (числитель этой дроби всегда отличен от нуля). Поэтому точек перегиба у графика функции не будет. Числитель будет всегда положителен, поэтому знак второй производной определится знаменателем $\left(1-x^2\right)^3$.

Отсюда следует, что на промежутке $(-1;1)$ вторая производная положительна $(y''>0)$ и следовательно, функция $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ будет выпукла вниз.

На промежутках $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ вторая производная будет отрицательна, следовательно, данная функция будет выпукла вверх.

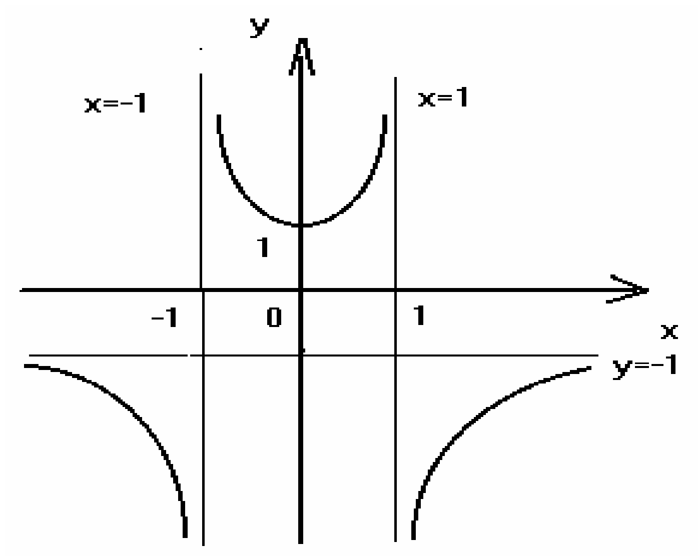



7. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

Полагаем $x=0$. Тогда $y=\dfrac{1+0}{1-0}=1$. Точка пересечения графика функции с осью ординат (0 ; 1).

Теперь полагаем $y=0$. Нет таких значений $x$, которые удовлетворяли бы этому требованию (числитель данной функции всегда отличен от нуля).

Поэтому график функции не пересекает ось абсцисс. На основе проведенного анализа строим график функции.



# IV. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## ТЕМА 9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### *9.1 Основные определения*

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$, если в любой точке $x$ интервала $(a,b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается символом:

$\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$, то, в силу следствия из теоремы

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C$ – некоторая постоянная.

Операция по нахождению первообразной или неопределенного интеграла называют интегрированием.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha = const, \alpha \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ (в любом интервале, в котором $x \neq 0$)
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a = const, a > 0, a \neq 1)$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ (в любом случае, где $\cos x \neq 0$).
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$ (в любом случае, где $\sin x \neq 0$).
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (-|a| < x < |a|).$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad a = const$

### *9.2 Основные свойства интегралов*

1). $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2). $\int dF(x) = F(x) + C$;

3). $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

4). $\int [Af(x)]dx = A\int f(x)dx$, где $A = const$

### *9.3 Основные методы интегрирования*

#### *9.3.1 Метод непосредственного интегрирования*

*Вычисление интегралов с помощью основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов называется непосредственным или элементарным интегрированием.*

*ПРИМЕР. Вычислить интеграл:* $\int (2\sin x + 6 - 3x^2)dx$

*Решение:*

$$\int (2\sin x + 6 - 3x^2)dx = \int 2\sin x dx + \int 6dx - \int 3x^2 dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 6\int dx - 3\int x^2 dx = -2\cos x + 6x - x^3 + C$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int \left( \frac{2}{x^2+1} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$

*Решение:*

$$\int \left( \frac{2}{x^2+1} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = 2\int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \sin^2 \frac{x}{2} dx =$$
$$= 2arctgx + \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = 2arctgx + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

#### *9.3.2 Интегрирование подстановкой*

Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором множестве $\{x\}$, и пусть $\{t\}$ – множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная функция $G(t)$, т. е.

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G(\varphi(x))$, т. е.

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C.$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int (3x-4)^{11} dx$

<u>Решение:</u> Сделаем замену $3x-4=t$, отсюда $3dx=dt, \quad dx=\frac{1}{3}dt$

$$\int(3x-4)^{11}dx=\frac{1}{3}\int t^{11}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{11+1}}{11+1}=\frac{1}{36}\cdot t^{12}+C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int(3x-4)^{11}dx=\frac{1}{36}\cdot(3x-4)^{12}+C$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int sin^3 x\,cos^8 x dx$

<u>Решение:</u> Полагая, $cos\,x=t, \quad -sin\,xdx=dt,$ получим

$$\int sin^3 x\,cos^8 xdx=\int sin^2 x\,cos^8 x\,sin\,xdx=\int\left(1-cos^2 x\right)cos^8 x\,sin\,xdx=$$

$$=-\int\left(1-t^2\right)t^8dt=-\int t^8dt+\int t^{10}dt=-\frac{1}{9}t^9+\frac{1}{11}t^{11}+C=$$

$$=-\frac{1}{9}cos^9 x+\frac{1}{11}cos^{11} x+C$$

### <u>*9.3.3 Метод интегрирования по частям*</u>

Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx,$$

или в другой форме

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Типы интегралов, берущихся интегрирование по частям:

$$\int Q(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x\end{Bmatrix}dx=\int Q(x)d\begin{Bmatrix} e^x \\ -\cos x \\ \sin x\end{Bmatrix}. \quad \int f(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ arc...(x)\end{Bmatrix}dx=\int\begin{Bmatrix} \ln x \\ arc...(x)\end{Bmatrix}dF(x)$$

ПРИМЕР. *Вычислить:* $\int x^2e^{2x+3}dx$

<u>Решение:</u> Интегрируем «по частям»: $\int udv=uv-\int vdu.$

Пусть $u=x^2$, тогда $dv=e^{2x+3}dx$

$$du=2xdx, \quad v=\int e^{2x+3}dx=\left[2x+3=z, dz=2dx\right]=\frac{1}{2}\int e^z dz=\frac{1}{2}e^z=\frac{e^{2x+3}}{2}, \quad v=\frac{1}{2}e^{2x+3},$$

Имеем $\int x^2e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x+3}-\frac{1}{2}\int e^{2x+3}2xdx=\frac{1}{2}x^2e^{2x+3}-\int xe^{2x+3}dx$

Интеграл $\int xe^{2x+3}dx$ вычислим, снова применяя формулу интегрирования по частям.

Пусть $u = x$, тогда $dv = e^{2x+3}$, $du = dx,\quad v = \frac{1}{2}e^{2x+3}$

$$\int xe^{2x+3}dx = \frac{1}{2}xe^{2x+3} - \frac{1}{2}\int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}xe^{2x+3} - \frac{1}{4}e^{2x+3} + C$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int x^2e^{2x+3} = \frac{1}{2}x^2e^{2x+3} - \frac{1}{2}xe^{2x+3} + \frac{1}{4}e^{2x+3} + C$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int \ln x dx$

*Решение:*

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x}dx = x \cdot \ln x - x + C$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int x^2 \cdot \cos x dx$

*Решение:*

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2xdx & v = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C$$

### *9.3.4 Интегрирование простейших рациональных дробей*

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int \frac{1}{1-2x}dx$

*Решение:* $$\int \frac{1}{1-2x}dx = \begin{vmatrix} 1-2x = t \\ x = -\frac{1}{2}(t-1) \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int \frac{1}{(2x-3)^4}dx$

<u>*Решение:*</u> $\int \frac{1}{(2x-3)^4}dx = \left| \begin{matrix} 2x-3=t \\ x=\frac{1}{2}(t+3) \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x-3)^3} + C$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл:* $\int \frac{dx}{x^2-6x+4}$

<u>*Решение:*</u> $\int \frac{dx}{x^2-6x+4} = \int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot 3x+9\right)-9+4} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-5} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = = \int \frac{dt}{t^2-a^2} =$

$= \int \frac{dt}{t^2-a^2} \quad = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{ta}{ta}\right| x = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{5}}{x-3+\sqrt{5}}\right| + C.$

## ТЕМА10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### *10.1 Интегральные суммы*

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a,b]$, $a<b$. Обозначим символом $T$ разбиение сегмента $[a,b]$ при помощи некоторых несовпадающих друг с другом точек $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на $n$ частичных сегментов $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, …, $[x_{n-1},x_n]$. Точки $x_0$, $x_1$, …, $x_n$ будем называть точками разбиения $T$. Пусть $\xi_i$ - произвольная точка частичного сегмента $[x_{i-1},x_i]$, а $\Delta x_i$ - разность $x_i-x_{i-1}$, которую в дальнейшем будем называть длиной частичного сегмента $[x_{i-1},x_i]$.

Число $I\{x_i,\xi_i\}$, где

$$I\{x_i,\xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется <u>*интегральной суммой*</u> функции $f(x)$, соответствующей разбиению $T$ сегмента $[a,b]$ и данному выбору промежуточных точек $\xi_i$ на частичных сегментах $[x_{i-1},x_i]$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\max\Delta x_i \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек $\xi i$, то он называется <u>*определенным интегралом*</u> от функции *y=f(x)* на отрезке *[a,b].*

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла – площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями *y=f(x), x=a, x=b, y=0. (Рис. 10.1)*

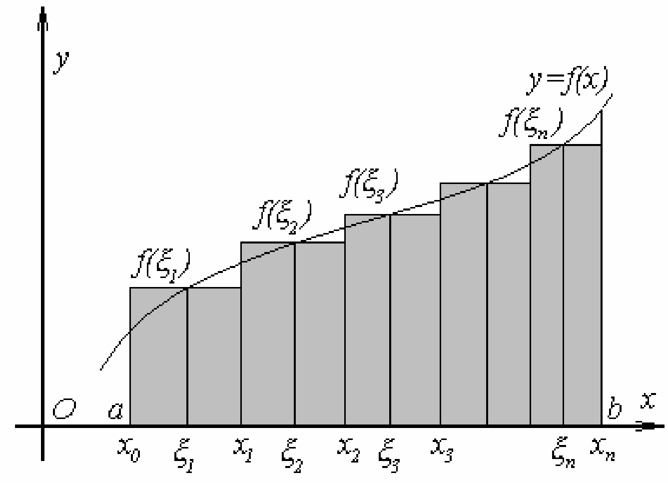



Рис. 10.1

### *10.2 Основные свойства определенного интеграла*

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2. При $a < b$ $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$, тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ также интегрируемы на этом сегменте, причем

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то функция $cf(x)$ ($c$=const) интегрируема на этом сегменте, причем

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то эта функция интегрируема на любом сегменте $[c,d]$, содержащемся в сегменте $[a,b]$.

6. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда эта функция интегрируема на сегменте $[a,b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## 10.3 Формула Ньютона-Лейбница

*Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная той функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int_0^1 x^2 dx$

<u>*Решение:*</u> $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int_1^2 2^{3x-4} dx$

<u>*Решение:*</u> $\int_1^2 2^{3x-4} dx = \frac{1}{32}\int_1^2 2^{3x} dx = \frac{1}{32}\int_1^2 8^x dx = \left.\frac{1}{32}\frac{8^x}{\ln 8}\right|_1^2 = \frac{1}{32}\left(\frac{8^2}{\ln 8} - \frac{8}{\ln 8}\right) = \frac{7}{6\ln 2}$

## 10.4 Замена переменной в определенном интеграле

*Пусть функция φ(t) имеет непрерывную производную на* $[\alpha,\beta]$, *где а= φ(α), в= φ(β) и функция f(x) непрерывна в каждой точке x=φ(t), где* $t \in [\alpha, \beta]$. *Тогда справедливо равенство:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt$$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int_0^1 x \cdot (2 - x^2)^5 dx$

<u>*Решение:*</u> $\int_0^1 x \cdot (2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} 2 - x^2 = t \\ dt = -2xdx \\ x = 0, \quad t = 2 \\ x = 1, \quad t = 1 \end{array} \right| == -\frac{1}{2}\int_2^1 t^5 dt = -\left.\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}\right|_2^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{21}{4}$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int\limits_0^{10} \sqrt{100 - x^2}\,dx$

<u>*Решение:*</u> Положим $x = 10\sin t,$ тогда $dx = 10\cos t dt$. Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 10$, то $t = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\int\limits_0^{10} \sqrt{100 - x^2 dx} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{100 - 100\sin^2 t} \cdot 10\cos t dt = 100\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \Rightarrow \left[\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}\right] =$

$$= 100 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = 50 \cdot \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 50\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] =$$

$$= 50 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 25\pi.$$

### *10.5 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

*Пусть функции u=u(x) и v=v(x)имеют непрерывные производные на* [*α,β*], *тогда* $\int\limits_a^b u dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v \cdot du$, где $(u \cdot v)\Big|_a^b = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int\limits_0^1 \ln(1 + x)dx$

<u>*Решение:*</u> $\int\limits_0^1 \ln(1 + x)dx = \left|\begin{array}{c} \ln(1 + x) = u \\ du = \dfrac{1}{1 + x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{array}\right| =$

$$= x\ln(1 + x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1 + x}dx = \ln 2 + \int\limits_0^1 \frac{1}{1 + x}dx - \int\limits_0^1 dx = \ln 2 + \ln|1 + x|\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

ПРИМЕР. *Вычислить определенный интеграл:* $\int\limits_1^e (x - 2)\ln x dx$

<u>*Решение:*</u> Пусть $u = \ln x,$ *тогда* $dv = (x - 2)dx,$

$$du = \frac{dx}{x}, v = \int (x - 2)dx = \int x dx - 2\int dx = \frac{x^2}{2} - 2x, \quad v = \frac{x^2}{2} - 2x,$$

По формуле $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ имеем

$$\int_1^e (x-2)\ln x dx = \ln x\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx + 2\int_1^e dx = \frac{e^2}{2} - 2e - \frac{1}{4}x^2\Bigg|_1^e + 2x\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) + 2(e-1) = \frac{1}{2}e^2 - 2e - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + 2e - 2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{7}{4}.$$

## *10.6 Приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур*

*Пусть на [a,b] заданы непрерывные функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, такие что*

$f_2(x) \geq f_1(x)$

*Тогда площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ на [a,b] находится по формуле:*

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

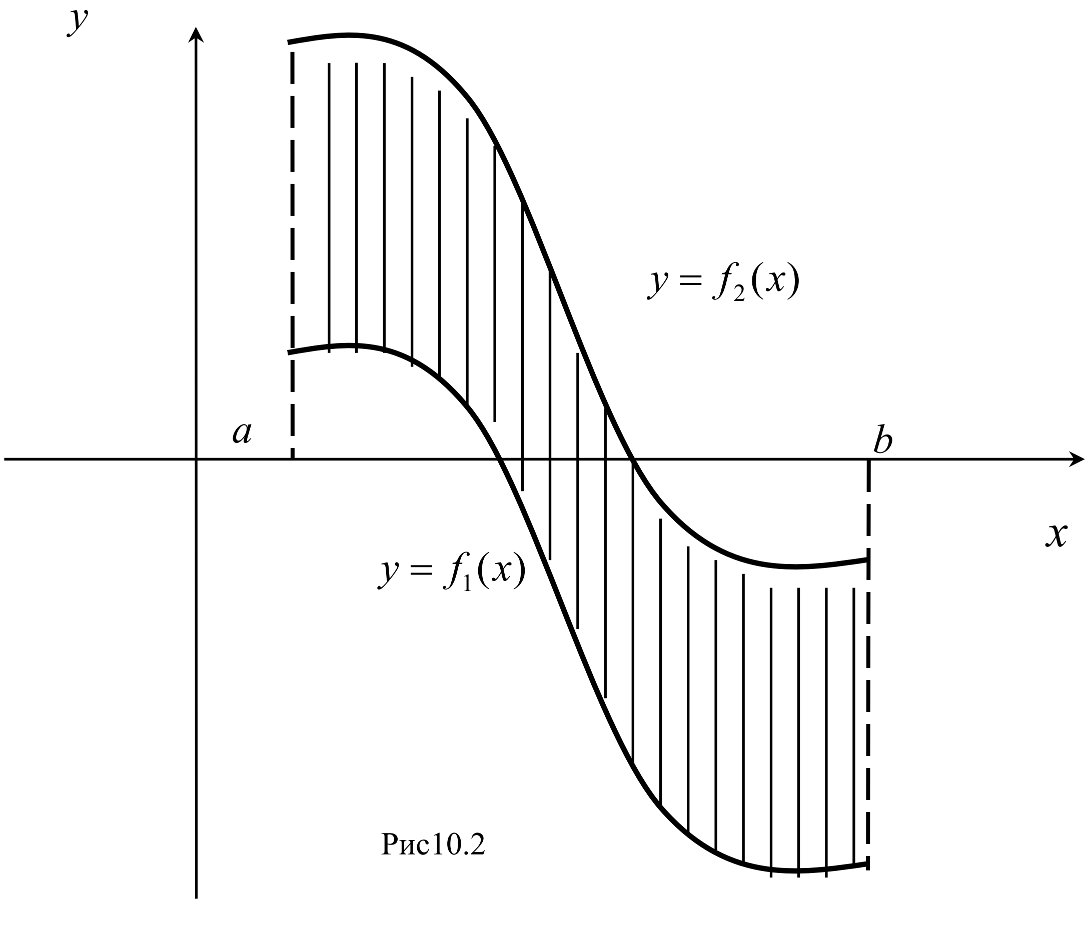



Рис10.2

ПРИМЕР. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:*

$y = x^2 - 2, \quad y = x$

*Решение:* Сделаем чертеж, и найдем точки пересечения графиков:
$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

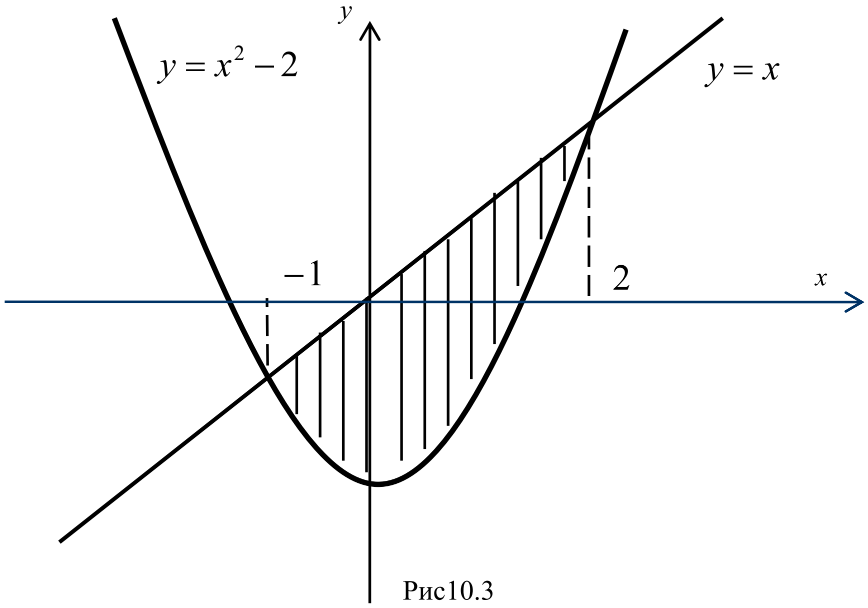



Рис10.3

Следовательно, линии пересекаются в точках: $(-1,-1), \quad (2,2)$.

Из рисунка видно, что $f_2(x) \geq f_1(x)$, поэтому $f_1(x) = x^2 - 2, \quad f_2(x) = x$.

Тогда площадь искомой фигуры равна:

$$S = \int_1^2 (x - x^2 + 2)dx = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right)\Bigg|_1^2 = 4{,}5 \quad (кв.ед.)$$

ПРИМЕР. *Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделать чертеж области.*

$y = x^2; \quad y = 2x$

*Решение*: Найдем точки пересечения параболы и прямой
$x^2 = 2x; \quad x^2 - 2x = 0; \quad x(x-2) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2, y_1 = 0; y_2 = 4$.

Таким образом, заданные кривые пересекаются в точках *O (0;0) и A (2;4)*. Площадь заштрихованной фигуры можно найти как разность площадей треугольника *OBA* и фигуры, образованной кривой $y = x^2$, осью ох и прямой *AB*.

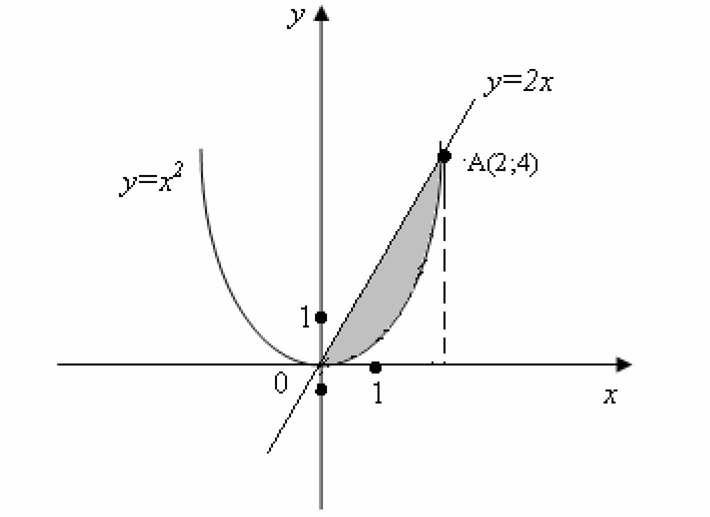



Рис10.4

Следовательно, $S=\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=2^2-\frac{2^3}{3}=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}(eg^2)$ .

### *10.7 Вычисление объемов тел вращения*

*Пусть функция y=f(x) –знакопостоянная и непрерывная на [a,b]. Объем тела Vx, образованного вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной линиями: y=f(x), y=0, x=a, x=b определяется по формуле:*

$$V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

ПРИМЕР. *Вычислить объем тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:*

$y=e^{-x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1$

<u>Решение</u>: Сделаем чертеж, и найдем точки пересечения графиков функций: *x=1*.

$$V_x=\pi\int\limits_0^1 e^{-2x}dx=-\pi\cdot\frac{1}{2}e^{-2x}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)=1.36\quad(\textit{куб.единиц})$$

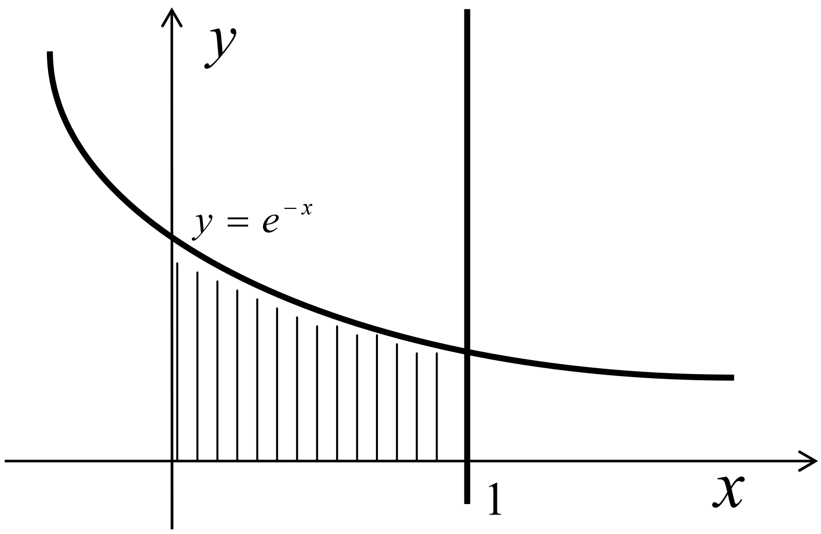



**Рис 10.5**

ПРИМЕР. *Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX кривой.* $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad y = 0$.

Решение: Сделаем чертеж, и найдем точки пересечения графиков функций: *x=1*.

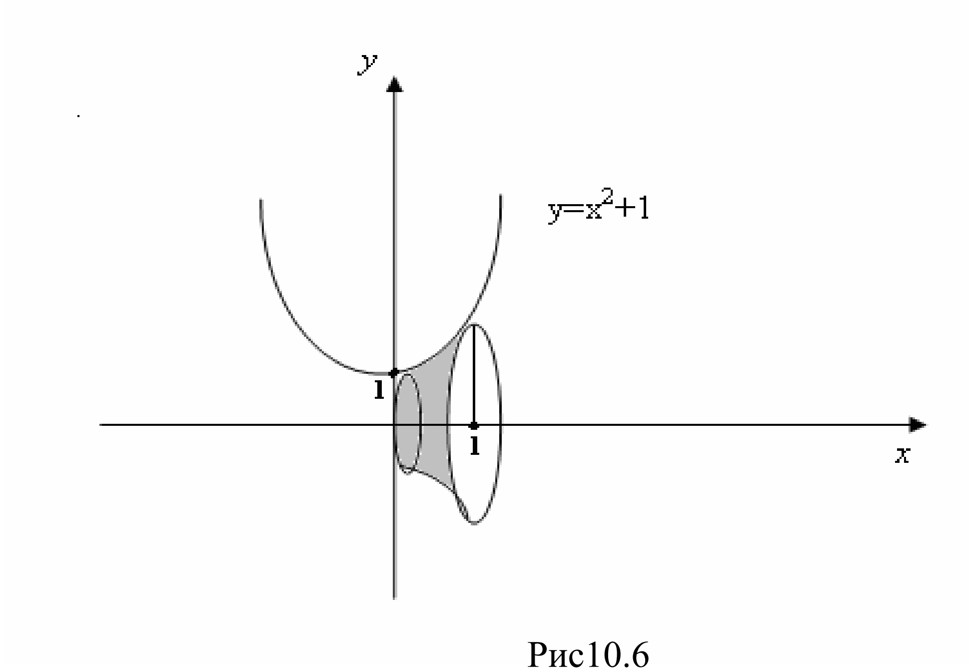



Рис10.6

Объем фигуры, образованной вращением кривой y=*f(x)* вокруг оси *ox*, равен

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \pi \cdot \frac{28}{15}\left(eg^3\right)$$

# ТЕМА 11. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 11.1 *Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)*

*Несобственным интегралом* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ от функции *y=f(x)* на полуинтервале $[a,+\infty)$ называется предел функции *Ф(t)* при $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx$.

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся к данному пределу. Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл* $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

*Решение:* $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^t\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$

ПРИМЕР. *Вычислить несобственные интегралы, или установить их расходимость.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$$

*Решение:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}(arctgx)\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}(arctgx)\Big|_0^b = arctg0 -$$

$$- arctg(-\infty) + arctg(+\infty) - arctg0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

## *11.2 Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода)*

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна, но неограниченна на полуинтервале *[a,b)*. Для определенности положим, что она ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a,b-\delta]0<\delta<b-a$, но неограниченна в любой окрестности точки b или на промежутке $[b-\delta,b]$.

*Несобственным интегралом* $\int_a^b f(x)dx$ от функции *y=f(x)* на полуинтервале $[a,b)$ называется предел $\lim\limits_{\delta\to0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, где $\delta>0$.

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся.

Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Точка *b* называется особой точкой.

Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла от функции *y=f(x)* непрерывной, но неограниченной на полуинтервале (*a,b*]: $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

*Решение:* Особая точка *x=0*.

$$\int\limits_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_\delta^1 = 2(1-\sqrt{\delta}),\quad \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\delta\to 0}2(1-\sqrt{\delta}) = 2.$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

*Решение:* Особые точки: *x=-1, x=1.*

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-1+\delta}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\delta}^0 + \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1+\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\arcsin(-1+\delta) + \lim_{\delta\to 0}\arcsin(1-\delta) = -\arcsin(-1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

ПРИМЕР. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

*Решение:* В данном случае подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ претерпевает разрыв в точке $x = 1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[0;9]$:

$$\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{1+\eta}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{1+\eta}^{0}(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(3\sqrt[3]{(x-1)}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\eta\to 0}\left(3\sqrt[3]{(x-1)}\right)\Big|_{1+\eta}^{9} =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}\right) + 3\lim_{\eta\to 0}\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\eta}\right) = 3 + 3\cdot 2 = 9.$$

# V. ТЕОРИЯ РЯДОВ

## ТЕМА 12. РЯДЫ

### *12.1 Числовые ряды*

*Числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел

$u_1, u_2, \dots u_n$, соединенных знаком сложения $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_n$ .

Числа $u_1, u_2, \dots u_n$ называются *членами ряда*.

Член $u_n$ называется *общим или n – ным членом ряда.*

Сумма $n$ первых членов ряда называется *n-ой частичной суммой ряда $S_n$.*

Ряд называется *сходящимся,* если существует конечный предел последовательности его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ .

Если конечного предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд называется *расходящимся.*

ПРИМЕР. *Исследовать сходимость геометрического ряда, состоящего из членов геометрической прогрессии:* $a + a\cdot q + a\cdot q^2 + \dots + a\cdot q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot q^{n-1}$

*Решение:* Установим, при каких значениях знаменателя прогрессии $q$ ряд сходится или расходится. $S_n = \dfrac{a\cdot\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

1. $|q| < 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\cdot(q^n - 1)}{q-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a\cdot q^n}{q-1} - \dfrac{a}{q-1}\right) = \dfrac{a}{q-1}$ - ряд сходится.

2. $|q| > 1$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ - ряд расходится.

3. $q = 1$, тогда ряд принимает вид: $a + a + a + \dots + a + \dots$ Сумма ряда: $S_n = a + a + \dots + a = n\cdot a$ , $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a) = \infty$ - ряд расходится.

4. $q = -1$, ряд принимает вид: $a - a + a - \dots + a - \dots$ $S_n = 0$ *при n – четном*, $S_n = a$ *при n – нечетном*. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - не существует, ряд расходится.

Таким образом, при $|q| < 1$ - ряд сходится, а при $|q| \geq 1$ - ряд расходится.

*Признак Даламбера*

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует конечный предел отношения его *(n+1) –го* члена к *n – му*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ .

Если $l<1$ – ряд сходится; если $l>1$ – ряд расходится; если $l=1$ – вопрос о сходимости остается нерешенным.

ПРИМЕР. *Исследовать ряд на сходимость:* $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

<u>*Решение:*</u> Воспользуемся признаком Даламбера. $u_n=\frac{n}{2^n}$ $u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$ – ряд сходится.

ПРИМЕР. *Исследовать на сходимость ряд* $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\ldots+\frac{n}{5^{n-1}}+\ldots$

<u>*Решение:*</u> Воспользуемся признаком Даламбера: имеем: $a_n=\frac{n}{5^{n-1}}$,

$a_{n+1}=\frac{n+1}{5^{n+1-1}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 5^{n-1}}{5^n\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}<1$ – ряд сходится.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

<u>*Решение:*</u> $u_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ $u_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{3}{e}>1$$

### *12.2 Степенные ряды*

<u>*Степенным*</u> называется ряд $C_0+C_1\cdot x+C_2\cdot x^2+\ldots+C_n\cdot x^n+\ldots$ Числа $C_0\ldots C_n$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

При разных значениях $x$ будут получаться разные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися. Совокупность значений $x$, при которых степенной ряд сходится, называются областью сходимости степенного ряда.

ПРИМЕР. *Найти область сходимости степенного ряда* $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

<u>*Решение:*</u> Данный ряд можно рассматривать как геометрический при $q=x$,

который сходится при $|q|=|x|<1$, т.е. областью сходимости будет интервал $(-1,1)$.

ПРИМЕР. *Определить область сходимости степенного ряда.*

$$\frac{(x+0{,}2)}{1}+\frac{(x+0{,}2)^2}{2}+\ldots+\frac{(x+0{,}2)^n}{n}+\ldots$$

Здесь $a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Найдем радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right| = 1.$$

Следовательно, ряд обязательно сходится, если $-1 < x + 0,2 < 1,$ т.е. $-1,2 < x < 0,8$ .

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $[-1,2;0,8]$.

Если $x = 0,8$, то получаем ряд $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд. Он расходится. Если $x=-1,2$, то получаем ряд: $-1+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}$, получился знакочередующийся ряд.

Применим признак Лейбница:

1. $|-1| > \left|\frac{1}{2}\right| > \left|-\frac{1}{3}\right| \ldots$, т. е. модуль общего члена ряда убывает.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ =0, т. е. модуль общего члена ряда стремится к нулю.

Ряд сходится условно.

Область сходимости есть промежуток $[-1,2;0,8)$.

# VI. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## ТЕМА 13. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### *13.1 Основные понятия*

Пусть имеется *n* переменных величин, и каждому набору их значений $x_1, x_2, \ldots x_n$ из некоторого множества *X* соответствует определенное значение величины *z*. Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Дадим аргументу *x* приращение *Δx*, а аргументу *y* приращение *Δy*. Тогда функция *z* получит значение $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называется *полным приращением функции в точке (x,y)*.

*Частной производной функции нескольких переменных* по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной, при стремлении ее к нулю. Обозначается: $z'_x,\quad z'_y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y},\quad f'_x(xy),\quad f'_y(xy)$.

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},\ z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

ПРИМЕР. *Найти частные производные функции* $z = x\cdot\ln y + \dfrac{y}{x}$.

Решение: Найдем частную производную по *x (y=const):* $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$.

Аналогично найдем производную по *y:* $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$.

### *13.2 Производная по направлению. Градиент*

Пусть функция *z=f(x,y)* определена в некоторой окрестности точки *M(x,y).*

*l* – некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, где $\left|\vec{l}\right| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. *cosα, cosβ* – косинусы углов, образованных данным вектором с осями координат. Они называются направляющими косинусами.

Производной по направлению $z'_l$ функции двух переменных *z=f(x,y)* называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения *Δl* при $\Delta l \to 0$

$$z'_l = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении *l*.

*Градиентом функции двух переменных z=f(x,y)* называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$: $\nabla_z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего данное направление. Градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Если задана функция трех переменных *f(x,y,z),* то градиент будет являться трехмерным вектором с компонентами: $\nabla = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}; \dfrac{\partial f}{\partial y}; \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$.

### *13.3 Экстремум функции нескольких переменных*

Как и в случае функции одной переменной, функция *z=f(x,y)* имеет узловые, определяющие график функции, точки.

Определим точки экстремума для функции двух переменных.

Точка $M(x_0,y_0)$ называется *точкой максимума (минимума)* функции *z=f(x,y),* если существует окрестность точки *M*, такая что для всех точек *(x,y)* из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0,y_0) \ge f(x,y)$ — *max,* $f(x_0,y_0) \le f(x,y)$ — *min.*

ТЕОРЕМА. *Необходимое условие экстремума.*

Пусть точка $(x_0,y_0)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции *z=f(x,y).* Тогда частные производные в этой точке $f'_x(x_0,y_0)$ $f'_y(x_0,y_0)$ равны нулю: $\begin{matrix} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{matrix}$.

Однако, сформулированное выше условие является необходимым, но не достаточным. Т.е., если частные производные функции в точке равны нулю, то это еще не означает, что в данной точке имеется экстремум функции.

ТЕОРЕМА. *Достаточное условие экстремума.*

Пусть функция *z=f(x,y)*

1. Определена в некоторой окрестности критической точки $(x_0,y_0)$, в которой $f'_x(x_0,y_0)=0$ $\quad f'_y(x_0,y_0)=0$

2. Имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка: $f''_{xx}(xy)=A$, $f''_{xy}(xy)=f''_{yx}(xy)=B$, $f''_{yy}(xy)=C$.

Тогда, если $\Delta = A\cdot C - B^2 > 0$, то в данной точке функция имеет экстремум, причем: *если A>0, то минимум, если A<0, то максимум;*

если $\Delta = A\cdot C - B^2 < 0$, то функция экстремума не имеет,

если $\Delta = A\cdot C - B^2 = 0$, то вопрос остается открытым.

**_Алгоритм исследования функции нескольких переменных на экстремум_**

1. Найти частные производные: $z'_x = f'_x(x,y)$ $\quad z'_y = f'_y(x,y)$.

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти критические точки.

3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в критических точках и с помощью достаточного условия экстремума сделать вывод о наличии экстремума функции.

4. Найти значения функции в точках экстремума.

ПРИМЕР. *Найти экстремум функции* $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

*Решение:* 1. Найдем частные производные первого порядка: $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 3x$.

2. Решим систему уравнений и найдем критические точки: $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

3. Найдем частные производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$.

4. Найдем значения функции в точках экстремума:

*$x_1=0$, $y_1=0$:* $A_1 = 0$ $B_1 = 0$ $C_1 = -3$ $\Delta = -9$ — *экстремума нет.*

*$x_2=-1$, $y_2=1$:* $A_2 = -6$ $B_2 = 6$ $C_1 = -3$ $\Delta = 27$ — *экстремум есть. Т.к. $A<0$, то это будет максимум.*

# VII. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## ТЕМА 14. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### *14.1 Понятие и представления комплексных чисел*

*Комплексным числом z* называется выражение вида $z = x + iy$, где $x$ и $y$ — действительные числа, а $i$ — так называемая *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Если $x$=0, то число $0+iy = iy$ называется *чисто мнимым;* если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом $x$, а это означает, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

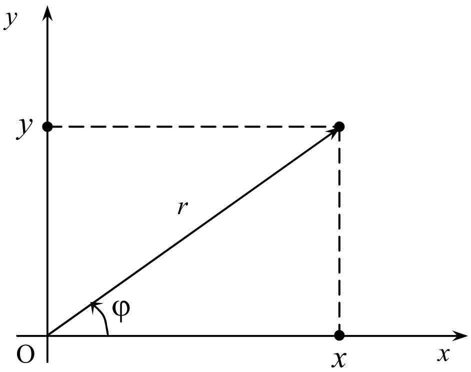
Число называется *действительной частью* комплексного числа $z$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а $y$ – *мнимой частью* $z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными*

($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

***Геометрическое изображение комплексных чисел***

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой *M(x; y)* плоскости *Oxy* такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку *M(x; y)* координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$ .




Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x; y)$. Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число *z*, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или *r*. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором *r,* изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается Arg *z* или $\varphi$.

Аргументом комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0, -1, 1, -2, 2\ldots$): $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ – *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi;\pi)$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$ (иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0;2\pi)$).

***Формы записи комплексных чисел***

Запись числа *z* в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Модуль r и аргумент $\varphi$ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + r\sin\varphi$ или $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

Такая запись комплексного числа называется <u>*тригонометрической формой.*</u>

Модуль r = |z| однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Например, $|\ i\ | = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Аргумент $\varphi$ определяется из формул:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r},\ tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Так как

$$\varphi = \arg z = \arg z + 2k\pi,$$

то

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2k\pi) = \cos(\arg z),\ \ \sin\varphi = \sin(\arg z)$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа *z,* т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как –π< arg z ≤π, то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти,} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Если точка *z* лежит на действительной или мнимой оси, то arg *z* можно найти непосредственно. Например, arg $z_1$=0 для $z_1$ = 2; $\arg z_2 = \pi$ для $z_3 = -3$; $\arg z_3 = \dfrac{\pi}{2}$ для $z_3 = i$ и $\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$ для $z_4 = -8i$

Используя *формулу Эйлера* $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$

комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой *показательной* (или <u>*экспоненциальной*) *форме*</u> $z = re^{i\varphi}$, где $r = |\,x\,|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \arg z = \arg z + 2k\pi$ (*k*=0, -1, 1, -2, 2…).

В силу формулы Эйлера, *функция* $e^{i\varphi}$ *периодическая с основным периодом* $2\pi$*.* Для записи комплексного числа *z* в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = \arg z$ .

ПРИМЕР. *Записать комплексные числа $z_1= -1+i$ и $z_2= -1$ в тригонометрической и показательной формах.*

Решение: Для $z_1$ имеем $|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

$\arg z = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, т.е. $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Для $z_2$ имеем $\quad r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \quad \arg z = \arg(-1) = \pi,$

т.е. $\varphi=\pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

### *14.2 Действия над комплексными числами*

#### *14.2.1 Сложение комплексных чисел*

*Суммой* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).}$$

Сложение комплексных чисел обладает *переместительным* (коммутативным) $z_1+z_2 = z_2+z_1$,

и *сочетательным* (ассоциативным) свойствами:

$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$

#### *14.2.2 Вычитание комплексных чисел*

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. *Разностью* комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ называется такое комплексное число $z$, которое, будучи сложенным с $z_2$, дает число $z_1$, т.е. $z=z_1-z_2$, если $z+z_2=z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$, то из этого определения легко получить $z$:

$$\boxed{z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).}$$

#### *14.2.3 Умножение комплексных чисел*

*Произведением* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).}$$

*Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение*

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Действительно, $i^2 = ii = (0+1i)(0+1i) = (0-1) + i(0+0) = -1.$

Например,

$(2-3i)(-5+4i) = -10 + 8i + 15i - 12i^2 = -10 + 23i + 12 = 2 + 23i.$

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ – действительное число.

*Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Найдем произведение комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т.е.

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).}$$

*При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть *n* множителей и все они одинаковые, то

$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. – *Формула Муавра.*

ПРИМЕР. *Найти* $(1+\sqrt{3}i)^9$.

*Решение:* Запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2;\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3},\ \ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем:

$$z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512.$$

*14.2.4 Деление комплексных чисел*

Деление определяется как действие, обратное умножению. *Частным двух комплексных чисел $z_1$* и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число $z$, которое, будучи умноженным на $z_2$, дает число $z_1$, т.е. $\frac{z_1}{z_2} = z$ , если $z_2z=z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует:

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения $x$ и $y$:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

ПРИМЕР: *Выполнить деление* $\frac{1+3i}{2+i}$.

*Решение:* $\frac{1+3i}{3+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$

Для тригонометрической формы комплексного числа формула деления имеет вид

$$\boxed{\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули, соответственно делятся, а аргументы, соответственно, вычитаются.

*14.2.5 Извлечение корней из комплексных чисел*

Извлечение корня $n$-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

*Корнем n-й степени из комплексного числа* $z$ называется комплексное число $\omega$, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $p^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k, k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ То есть $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

*k = 0, 1, ..., n-1*

Получим $n$ различных значений корня. При других значениях $k$, в силу периодичности косинуса и синуса, получатся значения корня, совпадающие с уже найденными. Так, при $k=n$ имеем

$$\omega_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{n}\right) =$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = \omega_0$$

Для любого $z \neq 0$ корень $n$-й степени из числа $z$ имеет ровно $n$ различных значений.

ПРИМЕР: *Найти значения а)* $\sqrt[3]{i} = \omega$; *б)* $\sqrt{-1} = \omega$.

*Решение:* а) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$. Таким образом,

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right),$$

*k= 0, 1, 2.*

При $k = 0$ имеем

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 1$ имеем

$$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

при $k = 2$ имеем

$$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\,.$$

б) Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi.$

Поэтому

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2},\ k = 0,\ 1.$$

При $k = 0$ получаем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$ а при $k = 1$ получаем $\omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$ Таким образом, $\sqrt{-1} = i$ и $\sqrt{-1} = i.$

# VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## ТЕМА 15. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### *15.1 Основные понятия*

*Дифференциальным уравнением (ДУ)* называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных и производные различных порядков этой функции.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называется *обыкновенным.*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то ДУ называется *уравнением в частных производных*.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное *уравнение*, называется *порядком дифференциального уравнения.*

*Решением дифференциального уравнения* называется такая функция *y=y(x),* которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

*Общим решением дифференциального уравнения* первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной $C$ является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной *С,* называется *частными.* Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего *начальным условиям y = y₀ при x = x₀ (другая запись:* $y\big|_{x=x_0} = y_0$*), называется задачей Коши.*

График всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения, построенный на плоскости *xOy,* называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Начинать решение дифференциального уравнения следует с определения их порядка и типа. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

можно представить также в форме дифференциалов

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

и наоборот. Переход от одной формы к другой осуществляется посредством равенства

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Если в процессе преобразования дифференциального уравнения приходится делить обе его части на некоторую функцию, то следует проверить, не является ли она решением уравнения.

## 15.2 *Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными*

Дифференциальное уравнение вида $P(x)dx+Q(y)dy=0$ называется *дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.* Данный тип уравнений решается методом непосредственного интегрирования, путем разделения переменных.

ПРИМЕР. *Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанному начальному условию:*

$$(1 + x^2) \cdot y' = -(1 + 2y) \cdot x, \quad y(0) = 1.$$

*Решение:* Это уравнение является *уравнением с разделяющимися переменными.* Разделим переменные, заменив $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$(1 + x^2) \cdot \frac{dy}{dx} = -(1 + 2y) \cdot x,$$

$$\frac{dy}{1 + 2y} = -\frac{xdx}{1 + x^2}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение с разделенными переменными:

$$\int \frac{dy}{1+2y} = -\int \frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dy}{1+2y} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2y)}{1+2y} = \frac{1}{2}\ln|1+2y|,$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Записав произвольную постоянную в виде $\frac{1}{2}\ln|C|$, имеем:

$$\frac{1}{2}\ln|1+2y| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln|C|$$

$$1+2y = \frac{C}{1+x^2},$$

$y = \dfrac{C}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$ – общее решение.

Найдем постоянную интегрирования *C*, используя начальные условия: *y(0)=1*

$1 = \dfrac{C}{2(1+0^2)} - \dfrac{1}{2}$. Таким образом, *C=3*. Тогда частное решение дифференциального уравнения примет вид: $y = \dfrac{3}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕР. *Найти общее решение уравнения* $(x+2y)\cdot y' = 1$.

<u>*Решение:*</u> Сделаем замену: $x+2y = z \quad \Rightarrow \quad z' = 1+2y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'-1}{2} = \frac{1}{2}\left(z'-1\right)$.

Тогда уравнение будет иметь вид: $z\cdot\frac{1}{2}\left(z'-1\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}z\cdot z' - \frac{1}{2}z = 1$.

$$\frac{1}{2}z\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2}z = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1+\frac{1}{2}z}{\frac{1}{2}z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2+z}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{2+z}dz = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z}{2+z}dz = \int dx,$$

$$x = \int \frac{z+2-2}{z+2}dz = \int dz - \int \frac{2}{z+2}dz = z - 2\ln|z+2| + C.$$

Возвращаемся к старым переменным:

$x = x+2y-2\ln|x+2y+2| + C \qquad C_1 = -\frac{1}{2}C \qquad \underline{y = \ln|x+2y+2| + C_1}$ – <u>*общее решение.*</u>

## *15.3. Линейные и однородные дифференциальные уравнения первого порядка*

Дифференциальные уравнения первого порядка называется <u>*линейным*</u>, если оно имеет вид: $y' + f(x)\cdot y = g(x)$.

Функции *f(x)* и *g(x)* – непрерывны. Неизвестная функция и ее производная входят в такое уравнение линейно.

Если *g(x)=0,* то уравнение называется *однородным.*

Если *g(x)* не равно 0, то уравнение называется *неоднородным.*

ПРИМЕР. *Решить уравнение* $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

*Решение:* Любое уравнение вида $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$,

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – однородные функции одного и того же измерения, является однородным. Данное уравнение, следовательно, будет *однородным*, так как коэффициенты при $dx$ и $dy$ – однородные функции первого измерения. Делаем замену:

$$y=xu,\quad dy=xdu+udx.$$

Отсюда

$$(x+xu)dx+(x-xu)(xdu+udx)=0,$$

или после очевидных сокращений

$$(1-u)xdu+(1+2u-u^2)dx=0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Разделив переменные и интегрируя, будем иметь:

$$\frac{(1-u)du}{1+2u-u^2}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|+\ln|x|=\ln C,$$

или

$$x^2(1+2u-u^2)=C_1,$$

где $C_1=\pm C^2$.

Подставляя вместо *u* его значение, получим общий интеграл

$$x^2+2xy-y^2=C_1$$

В процессе решения дифференциального уравнения мы делили обе его части на $1+2u-u^2$. Поэтому надо проверить, не являются ли решениями данного уравнения корни уравнения $1+2u-u^2=0$, т.е. числа $u=1\pm\sqrt{2}$. Подстановка показывает, что эти числа действительно являются решениями нашего уравнения. Так как $u=\dfrac{y}{x}$, то получаем еще два решения $y=(1+\sqrt{2})x$, $y=(1-\sqrt{2})x$ дифференциального уравнения. В данном случае эти решения получаются при $C_1=0$.

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство гипербол, включая их асимптоты $y=(1+\sqrt{2})x$.

ПРИМЕР. *Найти общее решение дифференциального уравнения* $x^2 y' + (1-2x)\cdot y = x^2$.

*Решение:* Так как это *линейное неоднородное уравнение* (оно линейно относительно $y$, $y'$), то его решение будем искать в виде

$$y(x) = u(x)\cdot v(x),$$

где $u$ – какое-нибудь ненулевое решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$x^2\cdot u' + (1-2x)u = 0 \text{ или } u' = -\frac{1-2x}{x^2}\cdot u$$

Находим его решение:

$$u(x) = e^{-\int \frac{1-2x}{x^2}dx}$$

Но $\displaystyle\int \frac{1-2x}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| = -\frac{1}{x} - \ln x^2$

(так как нужно частное решение, то производную постоянную положили равной нулю), поэтому

$$u(x) = e^{\frac{1}{x}+\ln x^2} = x^2\cdot e^{1/x}$$

Найдем теперь $v(x)$. Подставляя в исходное уравнение найденную функцию $u(x) = x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$, приходим к дифференциальному уравнению относительно $v$:

$$x^2\left(v'\cdot x^2\cdot e^{\frac{1}{x}} + v\cdot 2xe^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) + (1-2x)\cdot v\cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} = x^2$$

Преобразуем его, раскрывая скобки и приводя подобные члены:

$$v'\cdot x^4\cdot e^{\frac{1}{x}} = x^2, \quad v' = x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}.$$

Отсюда

$$v(x) = \int x^{-2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx = \int e^{-\frac{1}{x}}d\left(-\frac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} + C.$$

Окончательно,

$$y(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} + C\right)x^2\cdot e^{\frac{1}{x}} = C\cdot x^2\cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2.$$

$y = C\cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ – общее решение уравнения.

## *15.4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

*Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами* имеет вид $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $a_0$, $a_1$, $a_2$ – числа, причем $a_0 \neq 0$. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется <u>*однородным*</u>, а если $f(x) \neq 0$ – <u>*неоднородным.*</u>

Решение уравнения будем искать в виде: $y = Ce^{kx}$. Квадратное уравнение $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Пусть $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$ – дискриминант квадратного уравнения. Возможны следующие случаи:

1) $D > 0$ – общим решением уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ является функция $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ ($k_1$ и $k_2$ – корни характеристического уравнения);

2) $D = 0$ – общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ ($k$ – корень характеристического уравнения);

3) $D < 0$ – общим решением является функция $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ ($k_1 = \alpha + \beta i$, $k2 = \alpha - \beta i$ – корни характеристического уравнения).

ПРИМЕР. *Найти общее решение дифференциального уравнения* $y'' - 5y' + 4y = 0$.

<u>*Решение:*</u> Решение уравнения ищем в виде: $y = Ce^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 5k + 4 = 0$ - характеристическое уравнение. Дискриминант квадратного уравнения равен: $D = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad k_1 = 4 \quad k_2 = 1$ - корни характеристического уравнения. Корни вещественные и разные, поэтому общее решение будет иметь вид: $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ - общее решение.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

<u>*Решение:*</u> $y = Ce^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0$, $D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3 = k$. Корни вещественные и одинаковые, поэтому общее решение будет иметь вид:

$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$.

ПРИМЕР. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

<u>*Решение:*</u> $y = Ce^{kx} \quad \Rightarrow \quad k^2 - 2k + 2 = 0$, $D = 4 - 8 = -4 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$,

$k_1 = 1 + i \quad k_2 = 1 - i$. Корни комплексные, поэтому общее решение будет иметь вид: $y = C_1 e^x \cdot \cos x + C_2 e^x \cdot \sin x$.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Если $y^*$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ и $Y$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = Y + y^*$

Укажем правило нахождения частного решения неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1) Пусть $f(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$; тогда:

а) $y^* = Ax^2 + Bx + C,$ если нуль не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$ если нуль является двукратным корнем характеристического уравнения.

в) $y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, если нуль является двукратным корнем характеристического уравнения;

2) Пусть $f(x) = be^{ax}$; тогда:

а) $y^* = Ae^{ax}$, если число $a$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = Axe^{ax}$, если число $a$ является корнем характеристического уравнения;

в) $y^* = Ax^2e^{ax}$, если число $a$ является двукратным корнем характеристического уравнения.

3) Пусть $f(x) = e^{ax}(M\cos bx + N\sin Bx);$ тогда:

а) $y^* = e^{ax}(A\cos bx + B\sin Bx),$ если число $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^* = x \cdot e^{ax}(A\cos bx + B\sin Bx),$ если число $a + bi$ является корнем характеристического уравнения;

ПРИМЕР. *Найти общее решение уравнения* $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$ *и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям* $y_0 = 2/29$; $y'_0$ *=1/29.*

<u>*Решение:*</u> Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0.$ Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 13 = 0,$ откуда $k_1 = -2 - 3i,$ $k_2 = -2 + 3i.$ Следовательно, $Y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$. Имеем $y^{*\prime} = -2A \cdot \sin 2x + 2B\cos 2x,\quad y^{*\prime\prime} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x + 13A\cos 2x +$

$$+13B\sin 2x = 5\sin 2x;$$

$$(9A+8B)\cos 2x + (-8A+9B)\sin 2x = 5\sin 2x$$

и получим систему для вычисления коэффициентов А и В:

$$\begin{cases} 9A+8B=0 \\ -8A+9B=5 \end{cases} \Rightarrow \qquad A=-8/29 \qquad B=9/29$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения – вид

$$y = e^{-2x}(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_0 = \frac{2}{29} \Rightarrow C_1 - \frac{8}{29} = \frac{2}{29} \Rightarrow C_1 = \frac{10}{29};$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{-2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x)$$

$$+\frac{16}{29}\sin 2x + \frac{18}{29}\cos 2x;$$

$$y_0' = \frac{1}{29} \Rightarrow -2C_1 + 3C_2 + \frac{18}{29} = \frac{1}{29} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{29}.$$

Искомое частное решение:

$$y = e^{-2x}\left(\frac{10}{29}\cos 3x + \frac{1}{29}\sin 3x\right) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x \quad .$$