Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский государственный экономический университет

А. Д. Лазарева, Н. М. Сурнина, В. А. Лазарев

ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ

Раздел I

Рекомендовано
Учебно-методическим советом
Уральского государственного экономического университета
в качестве учебного пособия

Екатеринбург
2013

УДК 311(075.8)
ББК 60.6я73
Л 17

Рецензенты:

Кафедра экономики и управления Уральского института –
филиала Российской академии
народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации

Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой пищевой инженерии
Уральского государственного аграрного университета
Л. А. Минухин

Лазарева, А. Д.

Л 17 Теория статистики. Раздел I [Текст] : учеб. пособие / А. Д. Лазарева, Н. М. Сурнина, В. А. Лазарев ; М-во образования и науки РФ, Урал. гос. экон. ун-т. – Екатеринбург : [Изд-во Урал. гос. экон. ун-та], 2013. – 69 с.

Важность знания теории статистики определяется комплексом проблем, решаемых данной наукой. В пособии раскрывается содержание стадий статистического исследования, приводятся формулы расчета статистических показателей, рассматривается современная область применения статистической методологии, позволяющая облегчить усвоение курса. В каждой теме даются методические указания, рассматриваются примеры решения задач, приводится анализ исчисленных показателей. Пособие включает глоссарий, основные формулы и перечень рекомендованной литературы.

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по всем направлениям подготовки очной и заочной форм обучения.

УДК 311(075.8)
ББК 60.6я73

Введение

Учебное пособие «Теория статистики» (раздел I) предназначено для освоения учебной дисциплины «Статистика». Теория статистики является одной из базовых дисциплин в подготовке бакалавров всех направлений обучения, формируя профессиональные компетенции в области статистических исследований.

Изучение статистики обязательно входит в подготовку экономиста любого профиля. Статистика решает широкий круг задач.

Для обучения бакалавров навыкам решения задач, стоящих перед современной экономикой в рыночных условиях хозяйствования, требуется качественно новый подход к повышению уровня их подготовки. Без статистической составляющей невозможна интеграция в европейское образовательное пространство.

В учебном пособии не только раскрывается содержание стадий статистического исследования и приводятся формулы расчета статистических показателей, но и рассматривается современная область применения статистической методологии, позволяющая облегчить усвоение курса.

В каждой теме дается методическое указание, рассматриваются примеры решения задач, приводится анализ исчисленных показателей.

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения и программы «Общая теория статистики». Рассматриваются в комплексе основные положения, методы и приемы, обеспечивающие решение задач теории статистики.

Пособие включает глоссарий, основные формулы и перечень рекомендованной литературы. Тестовые задания для самоконтроля были выпущены авторами ранее (см. библиографический список). Недостаток информации для бакалавров вызвал необходимость издания данного пособия для более качественного изучения статистики.

Издание предназначено для бакалавров, обучающихся по всем направлениями подготовки очной и заочной форм обучения.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры статистики, эконометрики и информатики Т.Б. Рекечинской за оказание помощи в составлении пособия, а также студентке гр. Ю-12 А.В. Денихиной за помощь в техническом оформлении.

1. Статистическое наблюдение

Первым этапом статистического исследования является ***статистическое наблюдение***, представляющее собой научно обоснованную регистрацию фактов и их признаков, сбор данных о массовых явлениях. Собранные и зафиксированные данные являются источником первичной статистической информации, полученной в соответствии с определенными правилами, чему предшествует подготовительная методологическая и организационная работа по выбору того или иного способа сбора данных, вида момента регистрации, охвата единиц, организационной формы статистического наблюдения. Все это определяет достоверность сбора данных.

1.1. Виды и способы статистического наблюдения

Основными организационными формами ***статистического наблюдения*** являются три типа (вида):

1) отчетность (предприятий, организаций и т.п.);

2) специально организованное статистическое наблюдение (переписи, единовременные учеты, обследование сплошного и несплошного характера);

3) регистры.

Отчетность **–** основная форма статистического наблюдения, с помощью которой статистические органы в определенные сроки получают от учреждений, предприятий и организаций необходимые данные в виде установленных в законном порядке отчетных документов, скрепляемых подписями лиц, ответственных за их предоставление и достоверность собираемых сведений.

Отчетность как форма статистического наблюдения основана на первичном учете и является его обобщением. Отчетность делится на типовую и специализированную.

Специально организованное наблюдение проводится с целью получения сведений, отсутствующих в отчетности, или для проверки данных. Российская практическая статистика проводит переписи населения, материальных ресурсов, многолетних насаждений, неустановленного оборудования, строек. ***Перепись*** – специально организованное наблюдение, повторяющееся обычно через равные промежутки времени с целью получения данных о численности, составе и состоянии объекта статистического наблюдения по ряду признаков.

Первая всеобщая перепись населения России была произведена в 1897 г., затем в 1926, 1939, 1959, 1970, 1979, 1989, 2002 и 2010 гг.

Регистровое наблюдение – форма непрерывного статистического наблюдения за долговременными процессами, имеющими фиксированное начало, стадию развития и фиксированный конец. Оно основано на ведении статистического регистра. ***Регистр*** представляет собой систему, позволяющую отслеживать состояние единиц наблюдения и оценивать силу воздействия различных факторов на изучаемые показатели. В практике статистики различают регистры населения и регистры предприятий.

По степени охвата единиц исследуемой совокупности статистическое наблюдение может быть сплошным (полным) и несплошным (частичным).

При ***сплошном*** наблюдении обследованием охватываются все единицы изучаемой совокупности. Примером сплошного наблюдения являются переписи населения.

При ***несплошном*** наблюдении обследованием охватывается только определенная часть изучаемой совокупности. Оно подразделяется на выборочное, наблюдение основного массива и монографическое.

Выборочное наблюдение – наблюдение части единиц исследуемой совокупности, выделенной методом случайного отбора. Этому виду обследования посвящена тема 6 «Выборочное наблюдение».

Разновидностью выборочного наблюдения является ***метод моментных наблюдений.*** Информация собирается путем регистрации значений признаков и единиц выборочной совокупности в некоторые заранее определенные моменты времени. Поэтому метод моментных наблюдений предполагает отбор не только единиц исследуемой совокупности (выборку в пространстве), но и моментов времени, в которые проводится регистрация состояния исследуемого объекта (выборка во времени). Этот вид наблюдения применяется при проведении обследований доходов населения.

Наблюдение основного массива охватывает обследование определенных, наиболее существенных по значимости признаков единиц совокупности, которые по основному (для конкретного исследования) признаку имеют наибольший удельный вес в совокупности. Этот метод используется для организации наблюдения за работой городских рынков.

Для ***монографического наблюдения*** характерно глубокое и всестороннее исследование лишь отдельных единиц совокупности, представителей каких-либо новых типов явлений. Оно проводится с целью выявления имеющихся или намечающихся тенденций в развитии данного явления.

В зависимости от временного фактора наблюдение может быть прерывным и непрерывным.

Непрерывное (текущее) наблюдение осуществляется путем непрерывной регистрации фактов по мере их возникновения. При таком наблюдении прослеживаются все изменения изучаемого процесса или явления в динамике. Например, учет выработки продукции, регистрация рождений, смерти, состояния в браке.

Прерывное наблюдение бывает периодическим и единовременным.

Периодическое наблюдение проводится для наблюдения изменения объекта; данные могут быть собраны в ходе нескольких обследований.

К нему относятся переписи населения, которые проводятся через каждые 10 лет, регистрация цен производителей по отдельным товарам, которая в настоящее время проводится ежемесячно.

Единовременное обследование проводится нерегулярно, однократно, по мере надобности.

В зависимости от источников собираемых данных различают наблюдение непосредственное, документальный учет фактов и опрос.

Непосредственное наблюдение осуществляется путем фиксации фактов, лично установленных регистраторами в результате осмотра, измерения, подсчета признака изучаемого явления. Например, снятие товарных остатков при инвентаризации.

Документальное наблюдение основано на использовании в качестве источника статистической информации различного рода документов. Так, для составления статистической отчетности о работе предприятия используются документы бухгалтерского учета.

Опрос базируется на получении данных в форме ответов со слов респондента. Он используется для получения информации о явлениях и процессах, не поддающихся непосредственному прямому наблюдению. Такой вид наблюдения характерен для переписей населения, проведения социологических обследований и опросов общественного мнения.

Статистическое наблюдение различается не только по своим видам, но и по способам проведения, т.е. способам отбора статистических данных: ***устный*** (экспедиционный), ***саморегистрации, корреспондентский, анкетный и явочный***.

1.2. Программно-методическое обеспечение статистического наблюдения

Объект наблюдения – совокупность общественных явлений или процессов, подлежащих обследованию. Объектом наблюдения может быть совокупность физических лиц (население отдельного региона, страны; лица, занятые на предприятиях отрасли), физические единицы (станки, машины, жилые дома), юридические лица (предприятия, коммерческие банки, фермерские хозяйства, учебные заведения). Определяя объект наблюдения, необходимо точно указать единицу наблюдения и единицу совокупности.

Единица наблюдения – составной элемент объекта наблюдения, представляющий собой источник информации. Например, при демографических обследованиях единицей наблюдения может быть чел., но может быть и семья. ***Единица совокупности*** – составной элемент объекта наблюдения, который служит основой счета и обладает признаками, подлежащими регистрации в процессе наблюдения.

Программа наблюдения – это перечень признаков (вопросов), подлежащих регистрации в процессе наблюдения. Обычно программа выражается в форме вопросов переписного (отчетного) листа. От того, насколько правильно разработана программа, зависит общий успех проведения наблюдения.

1.3. Ошибки наблюдения

Расхождения между результатом наблюдения и истинным значением величины наблюдаемого явления называются ***ошибками наблюдения.***

В зависимости от характера, стадии и причин возникновения различают несколько типов ошибок наблюдения (рис. 1.1).

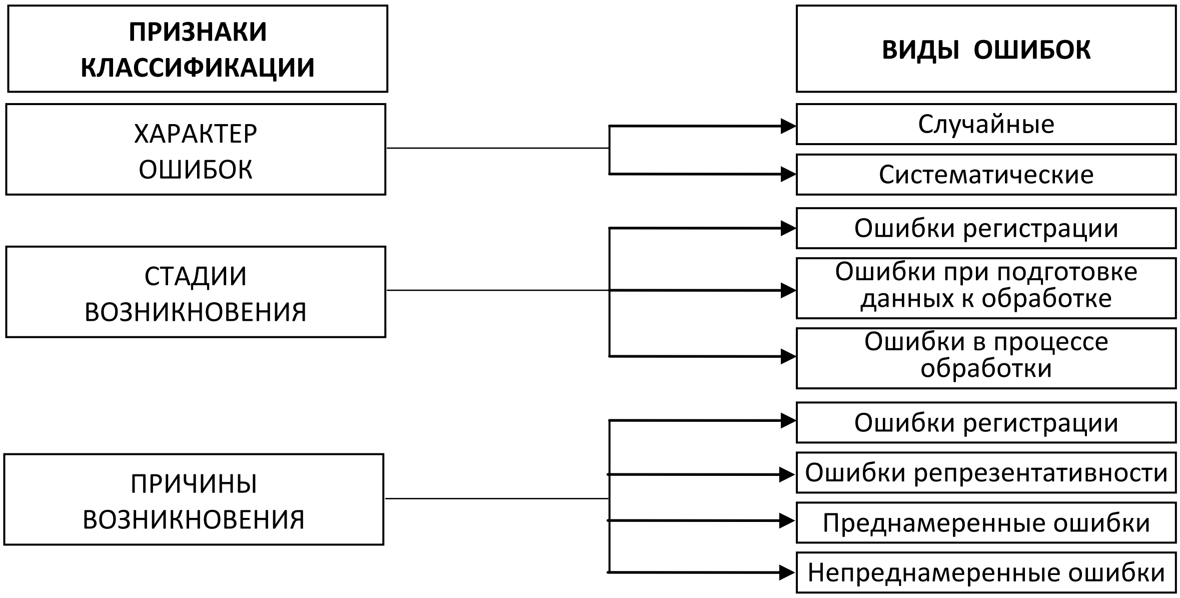

Рис. 1.1. Классификация ошибок наблюдения

Проверка достоверности, объективности и точности данных статистического наблюдения на практике осуществляется синтаксическим, логическим и счетным (арифметическим) контролем.

2. Сводка и группировка материалов статистического наблюдения

Статистическая сводка – это комплекс последовательных операций по обобщению конкретных единичных фактов, образующих совокупность, для выявления типичных черт и закономерностей, присущих изучаемому явлению в целом.

Классификация сводок:

1) по глубине и точности обработки: простая и сложная;

2) по форме обработки материала: централизованная и децентрализованная;

3) по технике исполнения: механизированная и ручная.

Группировка – разделение совокупности на однородные группы по определенным, существенным для них признакам. Каждая из групп характеризуется системой статистических показателей, например, группировка населения по размеру дохода на душу населения; распределение предприятий по формам собственности. Производится ***выбор группировочного признака,*** который должен отражать сущность изучаемого явления – быть существенным. Решение этой задачи тесно связано с другой – выбором числа групп. Следует исходить и из классификации признаков, которые могут быть атрибутивными или количественными. Атрибутивный признак не имеет количественного содержания (национальность, пол, образование и т.д.).

Группировка по атрибутивному признаку предусматривает знание и правильное определение отнесения изучаемого явления (его единиц) к определенной группе по виду признака. При небольшом числе разновидностей признака ими определяется количество групп (по полу – 2, месту проживания – 2). Количественные признаки выражены численно при каком-то их качественном содержании (себестоимость единицы продукции, заработная плата и т.д.).

При группировке по количественному признаку решается вопрос о числе групп. Если количественный признак имеет прерывное содержание (дискретно – тарифный разряд) и изменяется в ограниченных пределах (1, 2, 3, 4, 5, 6-й разряды), то число групп определяется числом признаков.

Если же признак непрерывный и определяется большим числом, то возникает ***вопрос об интервалах.*** При этом необходимо, чтобы число единиц в группах было достаточно большим для получения устойчивых типических характеристик. Решение вопроса о величине интервала зависит от характера вариации группировочного признака: при значительном размахе вариации используют группировку с неравными интервалами; равные интервалы применяют при равномерном изменении признака внутри совокупности. В обоих случаях при этом могут быть использованы как закрытые интервалы (с обоими пограничными значениями), так и открытые – для образования крайних групп (имеющих одну – верхнюю или нижнюю – границу).

По количеству признаков группировки делятся на простые – по одному признаку, и комбинационные, основу которых составляют несколько признаков.

В зависимости от поставленной задачи группировки могут быть трех видов: типологические, структурные, аналитические. ***Типологическая группировка*** направлена на выделение социально-экономических типов, она разделяет качественно разнородную совокупность по некоторым качественным признакам. Например, группировка населения по специальному составу. ***Структурная группировка –*** это разделение однородной совокупности на группы, характеризующие структуру изучаемой совокупности по какому-либо варьирующему признаку. С помощью структурных группировок изучается состав населения по полу, возрасту, месту проживания. Они характеризуют состав совокупности, структурные сдвиги в развитии социально-экономических явлений.

Аналитическая группировка применяется для исследования взаимосвязи и зависимости между явлениями. Признак, значение которого влияет на значение другого признака, называется ***факторным.*** Зависимый признак называется ***результативным.***

Группировка производится по факторному признаку, рядом с которым находится результативный признак. Производится анализ результативного признака при изменении факторного. Например, зависимость выработки рабочих бригады от тарифного разряда; группировка коммерческих банков по сумме активов баланса. Факторный признак – сумма активов (размер банка). С его ростом увеличивается численность сотрудников и прибыль банка.

2.1. Ряды распределения

Ряд распределения **–** это упорядоченное распределение единиц совокупности на группы по определенному варьирующему признаку. Ряд распределения состоит из двух элементов: 1) вариантов (индивидуальных значений признака, положенных в основу группировки) **x** и 2) частоты чисел, характеризующих, сколько раз в совокупности встречается то или иное значение вариантов, **f**. Ряды распределения могут строиться по ***количественному и атрибутивному*** (качественному) признакам. Ранжированные ряды распределения, построенные по количественному признаку, называются ***вариационными.***

В зависимости от характера вариации признака различают дискретные и интервальные ряды распределения.

Дискретный (прерывный) ***ряд*** характеризуется тем, что варианты в нем принимают обычно целые значения. Например, оценки студентов, полученные на экзамене, тарифный разряд рабочих и т.д.

Интервальный ряд **–** значения вариантов даются в интервалах «от и до» при непрерывной вариации признака. Интервал – значения варьирующего признака, лежащие в определенных границах. Интервалы могут быть равные и неравные. Например, стаж работы работников предприятия, распределение безработных по уровню образования. Величина интервала определяется по формуле

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{n},$$

где h – величина интервала; X_{max} и X_{min} – соответственно максимальное и минимальное значение варианта ряда распределения; n – число групп, которое задается в соответствии с приближением к нормальному распределению.

Если оно не задано, его находят по формуле Стерджесса:

$$n= 1+3{,}322 \lg N,$$

где N – число единиц совокупности изучаемого явления.

Статистические данные, полученные в результате наблюдения и сводки, а также подготовленные для анализа, обычно даются не в описательной форме, а в виде таблиц.

2.2. Статистические таблицы

Статистические таблицы **–** форма рационального и наглядного изложения цифровых характеристик исследуемых общественных явлений и процессов. Их построение связано с определенными правилами, они имеют подлежащее и сказуемое. ***Подлежащее*** – объект изучения, ***сказуемое*** – его цифровая характеристика.

Чаще всего подлежащее находится в левой части таблицы, заголовки подлежащего даны по строкам; сказуемое – в правой части, заголовки сказуемого указаны в верхней части граф.

Статистическая таблица должна иметь заголовок, который отражает ее краткое содержание. В зависимости от построения подлежащего различают три вида статистических таблиц: ***простые, групповые, комбинационные.***

Подлежащее простых таблиц – перечень изучаемых характеристик, в соответствии с содержанием которых простые таблицы могут быть перечневыми, территориальными и хронологическими. Если статистическое подлежащее представлено перечнями объектов (или показателей), такая таблица называется ***простой перечневой***.

Территориальной простой называется таблица, в подлежащем которой дан перечень стран, экономических районов, городов и других территорий. Если в подлежащем приводятся периоды времени или даты, таблица будет ***простой хронологической.*** Чаще всего при характеристике экономического развития применяют сочетания таблиц: перечнево-хронологические, территориально-хронологические, перечнево-территориальные, в которых дается более богатый материал для анализа.

Групповыми называются статистические таблицы, в которых объект изучения разделен на группы по одному изучаемому признаку.

Если изучаемые объекты группируются в подлежащем таблицы не по одному, а по нескольким признакам (чаще по двум или трем), взятым в сочетании, такая таблица называется ***комбинационной,*** т.е. каждая из групп, построенная по одному признаку, разбивается на подгруппы по какому-либо другому признаку. Например, распределение рабочих по стажу работы и по половому признаку.

В соответствии с разработкой другой части таблицы ***сказуемое*** может быть ***простым*** или ***сложным.***

Простая разработка сказуемого означает последовательное перечисление показателей, которые характеризуют подлежащее и расположены в таблице параллельно.

При сложной разработке сказуемого признаки, характеризующие подлежащее, берутся в сочетании или комбинации друг с другом и связаны между собой.

При составлении статистической таблицы следует соблюдать определенные правила.

Пример 2.1. Имеется информация о работе предприятий (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Данные о работе предприятий, млрд р.

№ п/п	Среднегодовая стоимость ОПФ	Стоимость произведенной продукции	№ п/п	Среднегодовая стоимость ОПФ	Стоимость произведенной продукции
1	2	3	1	2	3
1	7,9	10,2	11	10,0	19,1
2	2,4	2,6	12	3,1	5,2
3	5,3	6,2	13	12,9	20,4
4	5,7	6,9	14	1,7	2,3
5	6,5	7,8	15	6,7	8,0
6	6,3	7,1	16	1,5	1,8
7	5,7	6,8	17	13,5	21,8
8	5,5	6,4	18	3,6	3,9
9	2,7	4,7	19	8,0	14,3
10	9,5	16,1	20	5,1	6,2

1. По имеющимся данным построить интервальный ряд распределения среднегодовой стоимости основных производственных фондов (ОПФ), образовав четыре группы с равными интервалами. Определяем величину интервала по формуле $h = \frac{X_{max} - X_{min}}{n}$. Из условия примера (табл. 2.1) X_{min}= 1,5; X_{max} = 13,5; число групп n = 4.

$$h = \frac{13{,}5 - 1{,}5}{4} = 3 \text{ млрд р.}$$

Образуем группы с равными интервалами:

1,5–4,5; 7,5–10,5;

4,5–7,5; 10,5–13,5.

В каждый интервал попадают предприятия со стоимостью ОПФ, равным значению нижней границы «ОТ» и предприятия со стажем, совпадающим с верхней границей интервала «ДО».

По каждой группе подсчитаем численность предприятий, удельный вес предприятий в общем итоге и накопленную (кумулятивную) частоту (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Распределение предприятий по стоимости ОПФ

Группы предприятий по среднегодовой стоимости ОПФ, млрд р.	Число предприятий в группе	Число предприятий, % к итогу	Накопленные частоты
А	1	2	3
1,5–4,5	6	30	6
4,5–7,5	8	40	14
7,5–10,5	4	20	18
10,5–13,5	2	10	20
Итого	20	100	–

Используем простую структурную группировку (графа 2). Результаты группировки показывают, что более половины предприятий имеют стоимость ОПФ от 1,5 млрд до 7,5 млрд р., а свыше 7,5 млрд р. – лишь 30%, или шесть предприятий. Свыше 10,5 млрд р. имеют стоимость только два предприятия, что составляет 10% общей численности.

2. Построить аналитическую таблицу, используя данные табл. 2.2. По каждой группе подсчитать: 1) стоимость ОПФ всего и в среднем; 2) стоимость продукции всего и в среднем. Проанализировать полученные результаты.

Построение аналитической таблицы производится в три этапа.

Первый этап – разработка макета таблицы, т.е. таблицы, не заполненной цифрами исходных данных (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Макет таблицы

Группы предприятий по стоимости ОПФ, млрд р.	Число предприятий	Стоимость ОПФ, млрд р.		Стоимость продукции, млрд р.	
		всего	в среднем	всего	в среднем
А	1	2	3	4	5

Второй этап – составление вспомогательной рабочей (разработочной) таблицы (табл. 2.4) на основе макета, указав рядом с факторным **x** результативный признак **y** – стоимость произведенной продукции, используя данные исходной табл. 2.1 и табл. 2.2. Подлежащее макета и рабочей таблицы обязательно совпадают, а сказуемые совпадают не всегда.

Таблица 2.4

Рабочая таблица

Группы предприятий по стоимости ОПФ, млрд р.	№ предприятия / Число	Стоимость ОПФ, млрд р.	Стоимость продукции, млрд р.
А	1	2	3
1,5–4,5	2	2,4	2,6
	9	2,7	4,7
	12	3,1	5,2
	14	1,7	2,3
	16	1,5	1,8
	18	3,6	3,9
Итого	6	15,0	20,5
4,5–7,5	3	5,3	6,2
	4	5,7	6,9
	5	6,5	7,8
	6	6,3	7,1
	7	5,7	6,8
	8	5,5	6,4
	15	6,7	8,0
	20	5,1	6,2
Итого	8	46,8	55,4
7,5–10,5	1	7,9	10,2
	10	9,5	16,1
	11	10,0	19,1
	19	8,0	14,3
Итого	4	35,4	59,7
10,5–13,5	13	12,9	20,4
	17	13,5	21,8
Итого	2	26,4	42,2
Всего	20	123,6	177,8

Третий этап – для построения аналитической таблицы выносим итоговые строки из рабочей табл. 2.4 в новую табл. 2.5 с соблюдением основных правил построения.

Таблица 2.5

Группировка предприятий по величине ОПФ

Группы предприятий по стоимости ОПФ, млрд р.	Число предприятий	Стоимость ОПФ, млрд р.		Стоимость продукции, млрд р.	
		всего	в среднем	всего	в среднем
А	1	2	3	4	5
1,5–4,5	6	15	2,50	20,5	3,42
4,5–7,5	8	46,8	5,85	55,4	6,93
7,5–10,5	4	35,4	8,85	59,7	14,93
10,5–13,5	2	26,4	13,20	42,2	21,10
Итого:	20	123,6	6,18	177,8	8,89

Среднее значение определяется по формуле средней арифметической простой: $\overline{X} = \frac{\sum X}{n}$. В среднем по группе предприятий стоимость ОПФ составила 6,18 млрд р., стоимость произведенной продукции 8,89 млрд р. Ниже среднего уровня величину ОПФ имеют (6 + 8) = 14 предприятий, т.е. 70% общего числа. На этих предприятиях и наблюдается самый низкий уровень выпуска продукции – в среднем $\frac{20{,}5 + 55{,}4}{14} = 5{,}4$ млрд р.

Величина стоимости произведенной продукции выше среднего уровня только у шести предприятий и составляет 30% общего числа. На этих предприятиях выше и стоимость ОПФ, т.е. они лучше оснащены техникой и новым оборудованием.

Анализ результатов работы предприятий наглядно свидетельствует, что с увеличением ОПФ на предприятиях прослеживается и рост объема произведенной продукции.

Построение комбинационной таблицы в целом производится в таком же порядке; работа в этом случае усложняется при разработке подлежащего, которое включает, как правило, два или три (не более) признака.

2.3. Статистические графики, их основные элементы

Графиками в статистике называются условные изображения числовых величин и их соотношений в виде различных геометрических образов – точек, линий, плоских фигур и т.п.

Каждый график должен включать ряд основных элементов: графический образ; поле графика; пространственные ориентиры; экспликацию графика.

Графический образ (основа графика) – совокупность точек, линий и фигур, с помощью которых изображаются статистические данные. ***Поле графика*** – часть плоскости, где расположены графическое образы. Поле графика имеет определенные размеры, которые зависят от его конкретного назначения. ***Пространственные ориентиры*** графика задаются в виде системы координатных точек. ***Экспликация*** графика – словесное описание его содержания, включающее в себя название графика, которое в краткой форме передает его содержание: подписи вдоль масштабных шкал и пояснения к отдельным частям графика.

Для изображения ***вариационных рядов*** применяются ***линейные*** и ***плоскостные диаграммы***, построенные в прямоугольной системе координат. При дискретной вариации признака графиком вариационного ряда является ***полигон распределения***. Он представляет собой замкнутый многоугольник, абсциссами вершин которого являются значения варьирующего признака, а ординатами – соответствующие им частоты или частости.

2.4. Построение графика для дискретного ряда распределения

Пример 2.2. Группа студентов из 20 чел. сдавала экзамен по статистике. Были получены следующие экзаменационные баллы: 4, 5, 3, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 4, 4, 2, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 5, 4.

1. Построить дискретный ряд распределения экзаменационных оценок и представить результаты в виде простой таблицы (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Распределение студентов по экзаменационному баллу

Экзаменационный балл, x	Число студентов, f	Удельный вес студентов, % к итогу	Кумулятивная (накопленная) частота
А	1	2	3
5	5	25	5
4	9	45	14
3	4	20	18
2	2	10	20
Итого	20	100	–

На экзамене в группе получено: «5» – 5; «4» – 9; «3» – 4; «2» – 2. Группа является сильной, так как процент повышенных оценок составил $\left(\frac{5+9}{20}\right)\cdot 100\%$ = 70%. Средний балл вычисляется по формуле средней арифметической взвешенной $\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$:

$$\overline{X} = \frac{5\cdot 5 + 4\cdot 9 + 3\cdot 4 + 2\cdot 2}{20} = \frac{77}{20} = 3{,}9 \approx 4 \text{ балла.}$$

2. Изобразить графически распределение оценок в виде полигона (рис. 2.1) и кумуляты. Удельный вес (графы 1 и 2 табл. 2.6) находится как отношение частности **f** к целому $\sum$**f**: $d = \frac{f}{\sum f} = \frac{5}{20}\cdot 100 = 25\%$.

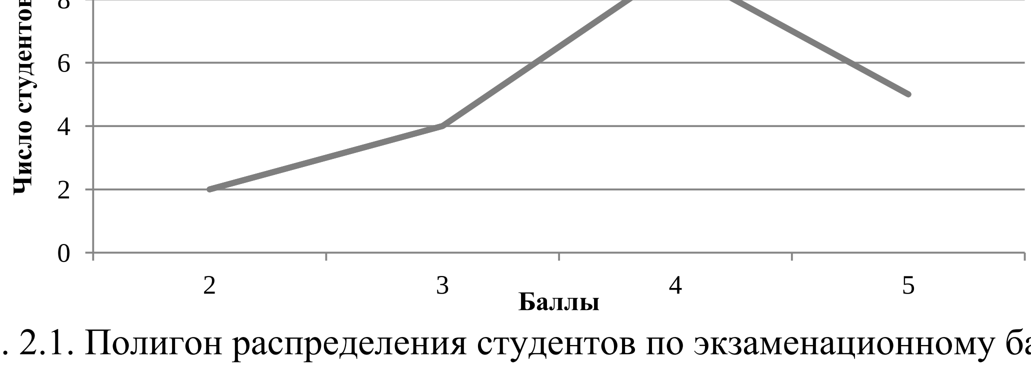

Рис. 2.1. Полигон распределения студентов по экзаменационному баллу

Кумулята распределения строится по накопленным частотам (рис. 2.2).

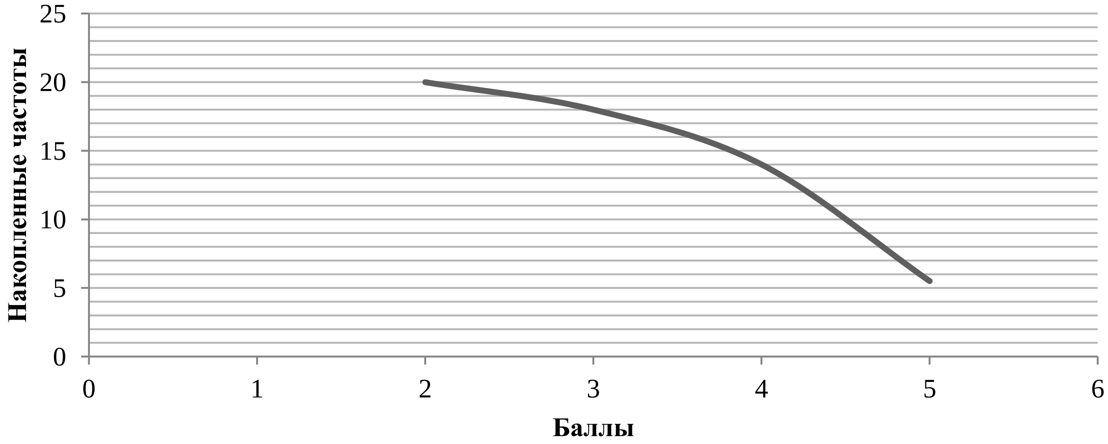

Рис. 2.2. Кумулята распределения студентов

2.5. Построение графика для интервального ряда распределения

Пример 2.3. Изобразить графически интервальный ряд распределения ОПФ (из примера 2.1) в виде гистограммы, полигона, кумуляты. В интервальных рядах откладывают на графике величину шага интервала h = 3 млрд р., которая принимается за постоянный отрезок (рис. 2.3).

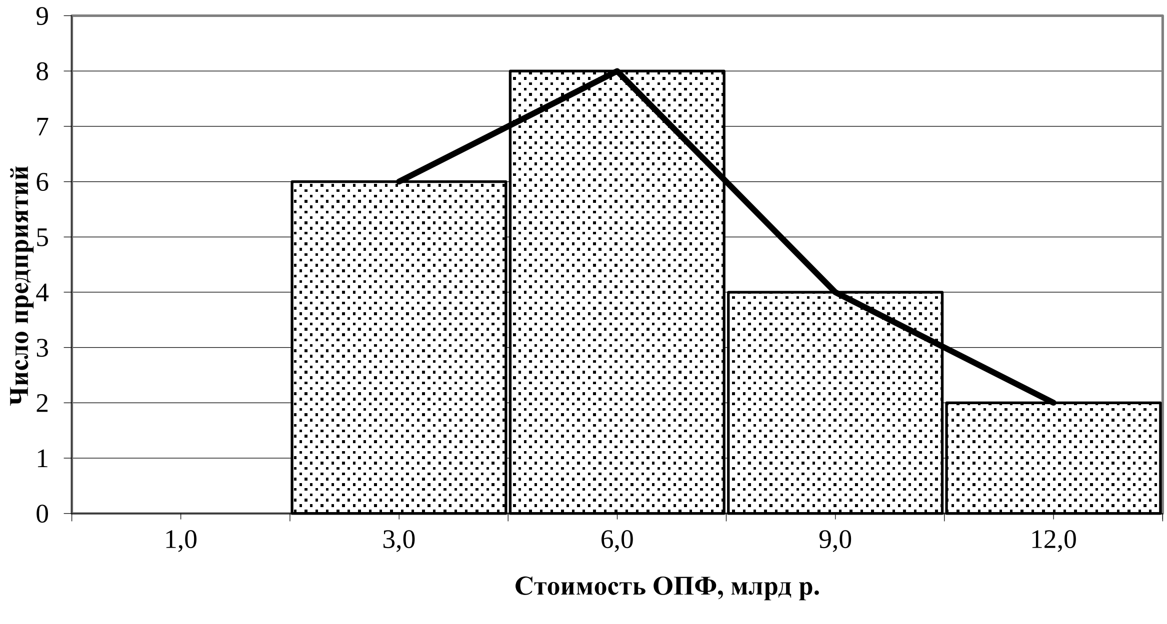

Рис. 2.3. Гистограмма и полигон распределения ОПФ

Если у каждого столбца определить середину вершины и полученные точки соединить ломаной линией, образуется полигон распределения ОПФ.

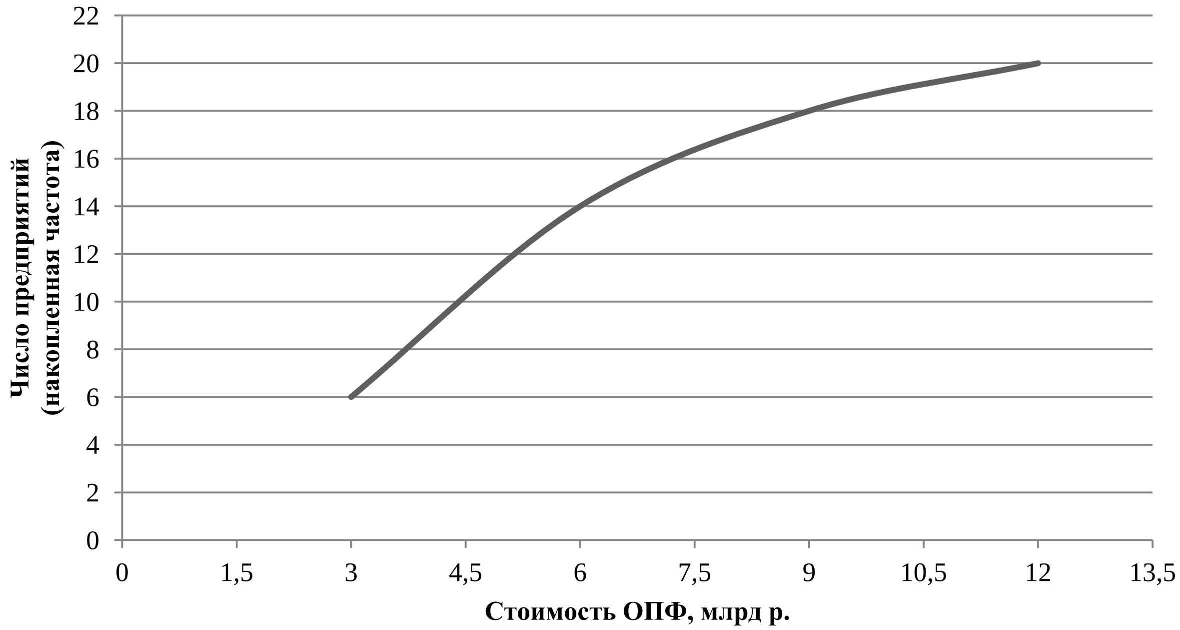

Рис. 2.4. Кумулята распределения ОПФ

3. Абсолютные и относительные величины

Абсолютными величинами называют показатели, выражающие размер или объем того или иного общественного явления в определенное время на территории. Абсолютные показатели являются именованными числами, т.е. выражаются в единицах измерения, присущих тем или иным общественным явлениям. Единицы измерения могут быть натуральными, трудовыми и демографическими, стоимостными.

Натуральные единицы могут быть простыми (метры, тонны, штуки, литры и т.д.) и сложными, являющимися комбинацией двух разноименных величин. Например, грузооборот транспорта выражается в тонно-километрах и пассажиро-километрах, производство электроэнергии – в киловатт-часах и т.д.

В статистике используют и абсолютные показатели, выраженные в условных натуральных единицах измерения. Так, например, разные виды топлива пересчитывают в условное топливо, тракторный парк в эталонные тракторы.

Трудовые и ***демографические единицы*** измерения используют при расчете показателей, характеризующих численность населения, его состав, трудовые ресурсы, их подготовку, использование и др., а также затраты труда на производство продукции. Это могут быть показатели в единицах численности (число людей) или в единицах рабочего времени (чел.о-час, чел.о-день и т.п.).

Стоимостные (денежные) единицы измерения используют для характеристики многих статистических показателей, например: товарооборота, объема продукции, величины национального дохода, доходов населения.

Относительными называют показатели, выражающие количественные соотношения между социально-экономическими явлениями, их признаками. Чаще всего относительные величины являются отношениями двух абсолютных величин. Величина, с которой производится сравнение (знаменатель дроби), обычно называется базой сравнения.

В зависимости от базы сравнения относительные величины могут выражаться в форме:

а) коэффициента, если база принимается за единицу;

б) процента (%), если база принята за 100;

в) промилле (‰), если база принята за 1000.

В статистике различают относительные величины планового задания, выполнения плана, динамики, структуры, координации, сравнения, интенсивности.

Относительная величина планового задания (ОВПЗ) характеризует отношение планируемого уровня показателя к фактически достигнутому уровню того периода, по сравнению с которым намечается увеличение или уменьшение показателя. За фактически достигнутый уровень (базу) принимается уровень, предшествующий планируемому периоду.

$$\text{ОВПЗ} = \frac{\text{у}_{\text{план}}}{\text{у}_0}.$$

Пример 3.1. В 2011 г. численность персонала составила 120 чел., в 2012 г. планировалось сокращение производства и доведение численности до 100 чел. Определить сокращение численности персонала.

Решение: $\text{ОВПЗ} = \frac{\text{у}_{\text{план}}}{\text{у}_0} = \frac{100}{120} \cdot 100 = 83{,}3\%$.

Предприятие планировало сокращение численности персонала на (83,3 – 100) = – 16,7%.

Относительная величина выполнения плана (ОВВП) определяется отношением фактически достигнутого уровня к показателю, установленному планом за один и тот же период времени.

$$\text{ОВВП} = \frac{\text{у}_1}{\text{у}_{\text{план}}}.$$

Пример 3.2. В 2011 г. численность персонала составила 120 чел., в 2012 г. планировалось сокращение производства и доведение численности до 100 чел. Но численность работников за год увеличилась до 130 чел. Определить фактическую численность работников по сравнению с планом.

Решение: $ОВВП = \frac{y_1}{y_{план}} = \frac{130}{100} \cdot 100 = 130\%.$

Фактическая численность работников превысила запланированный уровень на (130 – 100) = 30%.

Относительными величинами динамики (ОВД) называют относительные показатели, характеризующие изменение явлений во времени.

$$\text{ОВД} = \frac{y_1}{y_0}.$$

Относительные величины динамики можно исчислять на постоянной или переменной базе.

Пример 3.3. Имеются данные о численности безработных в РФ (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Численность безработных в РФ

Год	Численность безработных, млн чел.	К 2008 г. (с постоянной базой сравнения), %	К предыдущему году (с переменной базой сравнения), %
А	1	2	3
2008	8,9	100	100
2009	7,0	78,6	78,6
2010	5,1	57,3	72,9
2011	6,3	70,8	123,5
2012	5,6	62,9	88,9

Решение: для вычисления относительных величин ***с постоянной базой сравнения*** за базу примем уровень 2008 г. $\text{ОВД} = \frac{y_1}{y_0}$:

(7,0/8,9)·100= 78,6%;
(5,1/8,9) ·100= 57,3%;
(6,3/8,9) ·100= 70,8%;
(5,6/8,9) ·100= 62,9%.

Относительные величины с ***переменной базой сравнения*** $\text{ОВД} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$:

(7,0/8,9) ·100=78,6%;
(5,1/7,0) ·100=72,9%;
(6,3/5,1) ·100=123,5%;
(5,6/6,3) ·100=88,9%.

Между этими тремя показателями существует взаимосвязь:

$$\text{ОВД} = \text{ОВПЗ} \cdot \text{ОВВП}.$$

Относительные величины ***структуры*** исчисляются как отношение части, входящей в статистическую совокупность, к целому и выражаются кратным отношением или в процентах. Например, доля городского населения в общей численности России составляла в 1913 г. 18%, в 2012 г. – 74%.

Относительные величины ***координации*** характеризуют соотношение отдельных частей совокупности к одной из них, принятой за базу сравнения. В зависимости от поставленной задачи тот или иной признак может быть принят за базу. Координация характеризует, сколько единиц одной группы приходится на 10, 100, 1000 единиц другой группы изучаемой совокупности.

Например, численность промышленно-производственного персонала предприятия на 1 января 2013 г. составила 1035 чел., в том числе рабочих – 750, служащих – 85, специалистов – 180, руководителей – 20. В расчете на 100 рабочих на предприятии приходится 24 специалиста (180:750·100), служащих – 11 чел. (85:750·100), руководителей – 3 чел. (20:750·100).

Для одной и той же совокупности можно находить несколько относительных величин координации, так как в зависимости от задачи тот или иной признак может быть принят за базу.

Относительные величины ***сравнения (наглядности)*** характеризуют соотношение между величинами однородных явлений, относящихся к различным объектам или территориям за один и тот же период времени. Можно сравнить численность населения, объем продукции по странам и т.п. (для расчета показателей по разным странам должна использоваться единая методика, например, соотношение между уровнем себестоимости определенного вида продукции, выпущенной на разных предприятиях), причем наименьшее число берется в знаменателе.

Так в 2010 г. численность населения Китая составляла 1335 млн чел., Российской Федерации 142,9 млн чел. $К_{\text{сравн}} = \frac{1335}{142{,}9} = 9{,}34$. Следовательно, население Китая в 9,34 раза превосходит население России, или на 100 россиян приходится 934 китайца.

Относительные величины ***интенсивности*** характеризуют степень распространенности или развития явления в определенной среде. Они могут быть получены как отношения разноименных величин, определенным образом взаимосвязанных. К ним относят плотность населения, производство той или иной продукции на душу населения, потребление продуктов и товаров на душу населения и т.п.

Плотность населения страны исчисляется в единицах чел./км^2. Плотность населения Уральского региона составляет 23 чел./км^2.

Разновидностью интенсивности являются относительные показатели ***уровня экономического развития***, характеризующие уровни внутреннего валового продукта (ВВП), валового национального продукта (ВНП), национального дохода (НД) и других показателей на душу населения, играющих важную роль в оценке развития экономики страны.

4. Средние величины

При изучении темы необходимо уяснить принципы выбора формы средней величины и правильного ее вычисления. Выбор вида средней определяется экономическим содержанием показателя и исходных данных. В каждом конкретном случае применяется одна из средних величин: арифметическая, гармоническая, квадратическая, геометрическая и т.д.

Средняя арифметическая применяется по данным ряда, содержащего вариант **x** и частоту **f**. Если частоты одинаковы (при группировке) или каждый вариант встречается один раз, то применяется средняя арифметическая ***простая (невзвешенная):***

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n},$$

где *n* – число частот или групп с равными частотами, число наблюдений.

Если данные сгруппированы и частоты в группах неодинаковы, используют ***среднюю арифметическую взвешенную:***

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}.$$

Если имеет место общая характеристика (**M = xf**, выражающая объем, размер явления) и число частот известно, применяется ***средняя агрегатная:***

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum f}.$$

Если отсутствуют данные о частотах при наличии варианта **x** и общей характеристики **M**, для расчета средней необходимо определить частоты **f**, в этом случае используют ***среднюю гармоническую взвешенную***:

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}.$$

Знаменатель – частота f, которая в явном виде не задана и находится как M/x. Средняя гармоническая по характеристикам тождественна средней арифметической. Она может быть ***невзвешенной (простой)***, когда $M_1 = M_2 = M_3$, и формула в этом случае принимает вид:

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}},$$

где M приравнивается к единице; n – число групп с равными M.

Пример 4.1. Имеются данные о вкладах в банке (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Вклады в банке

Вид вклада	Ноябрь		Декабрь	
	Средний размер вклада, тыс. р., x	Число вкладов, тыс., f	Средний размер вклада, тыс. р., x	Сумма вкладов, млн р., M
До востребования	35	10	37	40,7
Срочный	40	8	43	38,7

В ноябре известен средний размер вкладов каждого вида **x**, число вкладов **f**. Следовательно, для расчета среднего размера по двум видам вкладов применяем формулу средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{35 \cdot 10 + 40 \cdot 8}{10 + 8} = 37{,}22 \text{ тыс.р}.$$

В декабре известен средний размер вкладов каждого вида **x**, а число вкладов неизвестно, но зато имеются данные об общих сумма этих вкладов **M = xf**. Поэтому средний размер вклада рассчитываем по формуле средней гармонической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{40700 + 38700}{\frac{40700}{37} + \frac{38700}{43}} = 39{,}7 \text{ тыс.р.}$$

В обеих формулах числитель представляет какую-то общую величину, объем явления (фонд заработной платы, валовой сбор урожая, затраты на производство продукции и т.д.).

4.1. Соотношение между формами средних величин

Все рассмотренные виды средних принадлежат к общему типу степенных средних. Различаются они лишь показателем. Степенная средняя степени **k** есть корень **k**-й степени из частного от деления суммы индивидуальных значений признака в **k**-й степени на число индивидуальных значений.

Простая **Степенные средние** **Взвешенная**

Формула степенной средней;
k – стат. размерность признака

Простая: $\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum x^k}{n}}$

Взвешенная: $\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum fx^k}{\sum f}}$

Исходная информация представлена:

Первичным признаком со стат. размерностью k = 1

Арифметическая простая

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

Вторичным признаком со стат. размерностью k = 1

Арифметическая взвешенная

$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$

Первичным признаком со стат. размерностью k = -1

Гармоническая простая

$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$

Вторичным признаком со стат. размерностью k = -1

Гармоническая взвешенная

$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{1}{x} M}$

Первичным признаком со стат. размерностью k = 2

Квадратическая простая

$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$

Вторичным признаком со стат. размерностью k = 2

Квадратическая взвешенная

$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$

Вторичным признаком со стат. размерностью k = 0

Средняя геометрическая

$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots x_n}$

Символы:

x – значение варианта; $\bar{\mathbf{x}}$ – среднее значение признака;

f – вес или частота ($\sum \mathbf{f} = \mathbf{n}$); **n** – общее число наблюдений;

M= xf – объем явления.

Чем выше показатель степени **k**, тем больше значение средней величины (если индивидуальные значения признака варьируют). Это свойство средних возрастать с повышением показателя.

Если все исходные значения равны, то и все средние равны константе. Для одной и той же совокупности существуют строго определенные соотношения между разными видами средних. Эти соотношения называются **правилом мажорантности:**

$$\bar{x}_{\text{гарм}} \le \bar{x}_{\text{геометр}} \le \bar{x}_{\text{арифм}} \le \bar{x}_{\text{квадр}}.$$

4.2. Свойства средней величины

Следует учитывать особенности расчета средней по дискретному и интервальному рядам распределения: в дискретном ряду – конкретные характеристики, непосредственно используемые в расчете; в интервальном ряду – варианты в виде интервалов, внутри которых подразумеваются все возможные значения, поэтому необходима величина, обобщающая значение интервала. В качестве такой величины применяют середину интервала, которая рассчитывается как полусумма пограничных значений интервала:

$$\bar{x} = \frac{x_{min} + x_{max}}{2},$$

исходя из однородности единиц по изучаемому признаку в интервале. Если есть открытые интервалы (с одним пограничным значением, минимальным и максимальным), их закрывают по шагу рядом стоящего интервала.

Свойства средней арифметической можно использовать в расчетах по способу моментов.

1. Если все варианты уменьшить на какую-либо величину, то средняя уменьшится на эту же величину. В статистике за таковой принимают вариант (в дискретном ряду) или середину интервала (в интервальном ряду), которые имеют наибольшую частоту, и обозначают **а**.

2. Если варианты уменьшить в какое-то число раз, то средняя уменьшится в это же число раз. За эту величину принимают в интервальном ряду с равными интервалами размер интервала и обозначают ***k***. Полученный на основе этих изменений результат в формуле средней арифметической корректируют на величины **а** и **k**; средняя принимает вид:

$$\bar{x} = \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)f}{\sum f} \cdot k + a, \qquad \text{где} \quad \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)f}{\sum f} = m_1$$ – момент первого порядка.

Пример 4.2. Распределение малых предприятий региона по стоимости основных производственных фондов (ОПФ) за год составило, млрд р. (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Вычисление средней величины по методу моментов

Группы предприятий по стоимости ОПФ	Число предприятий, **f**	Середина интервала, **x**	$\frac{x-a}{k}$	$\frac{x-a}{k}f$	Накопленная частота
А	1	2	3	4	5
14 – 16	3	15	-2	-6	3
16 – 18	9	17	-1	-9	12
18 – 20	16	19	0	0	28
20 – 22	12	21	1	12	
22 и более	10	23	2	20	
Итого	50	-	-	17	-

В табл. 4.2: а – вариант, соответствующий наибольшей частоте.

При f = 16: a = 19, k = 20 – 18 = 2.

Вычисляем момент первого порядка:

$$m_1 = \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)f}{\sum f} = \frac{17}{50} = 0{,}34;$$

$$\bar{x} = km_1 + a = 2 \cdot 0{,}34 + 19 = 19{,}68 \text{ млрд р.}$$

4.3. Структурные средние

К структурным средним относятся: ***мода, медиана, квартили, децили, перцентили***.

Мода и ***медиана*** при расчете не связаны с какой-то общей характеристикой, а представляют собой конкретный вариант в соответствии с их сущностью.

Мода – значение признака (варианта), который чаще всего встречается в совокупности.

Медиана – значение признака в середине ряда. Расчет моды и медианы зависит от вида ряда – дискретного или интервального. По ***дискретному ряду*** их находят без формул, по определению, визуально. Мода – по наибольшей частоте, медиана соответствует варианту, стоящему в середине ранжированного ряда. Положение медианы определяется по накопленной частоте.

По накопленным частотам определяют ее числовое значение в ***дискретном*** вариационном ряду; в ***интервальном*** – по следующим формулам:

а) ***мода***:

$$Mo = x_0 + k\frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)},$$

где f_2 – наибольшая (модальная) частота интервала; f_1 – частота интервала, стоящего перед модальным; f_3 – частота интервала, следующего за модальным; x_0 – начальное значение модального интервала; k – размер модального интервала, величина шага интервала. (Модальный интервал находится по наибольшей частоте);

б) ***медиана***:

$$Me = x_0 + k\frac{\frac{\sum f}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}},$$

где f_{Me} – частота медианного интервала; $\sum f$ – сумма всех частот ряда; S_{Me-1} – сумма накопленных частот до интервала, содержащего медиану; x_0 – начальное значение медианного интервала; k – размер медианного интервала.

По данным предыдущего **примера 4.2** (из табл. 4.2) найдем моду и медиану

1. ***Для дискретного ряда:***

а) ***мода.*** Находим по наибольшей частоте f = 16 (графа 1 табл. 4.2), ей соответствует вариант 19, Мо = 19 млрд р.;

б) ***медиана.*** Место медианы N: $\frac{\sum f}{2} = \frac{50}{2} = 25.$

Накопленная частота (графа 5 табл. 4.2) = 28. Как только сумма накопленных частот будет больше их полусуммы, 28 > 25, соответствующий этому значению вариант и будет медианой, Ме = 19 млрд р.

2. ***Для интервального ряда:***

а) ***мода.*** Начальное значение модального интервала $x_0 = 18$, $k = 2$, $f_2 = 16$, $f_1 = 9$, $f_3 = 12$.

$$Mo = x_0 + k\frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} = 18 + 2\frac{16 - 9}{(16-9)+(16-12)} =$$

$$= 18 + 2 \cdot 0{,}64 = 18 + 1{,}28 = 19{,}28 \text{ млрд р.}$$

Модальным значением стоимости ОПФ малых предприятий региона является стоимость, равная 19,28 млрд р. Это означает, что 16 предприятий региона имеют стоимость ОПФ 19,28 млрд р.;

б) ***медиана.*** Медианный интервал находим через сумму накопленных частот (3 + 9 + 16) = 28, что превышает половину суммы всех частот (50 : 2 = 25). Начальное значение медианного интервала $x_0 = 18$, его частота $f_{Me} = 16$, $k = 2$, сумма накопленных частот до медианного интервала $S_{Me-1} = 12$ (табл. 4.2):

$$Me = x_0 + k\frac{\frac{\sum f}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}} = 18 + 2\frac{25 - 12}{16} = 18 + 2 \cdot 0{,}8125 =$$

$$= 18 + 1{,}625 = 19{,}625 \text{ млрд р.}$$

Следовательно, из 50 малых предприятий региона 25 имеют стоимость ОПФ менее 19,625 млрд р., а 25 предприятий – более.

Аналогично с нахождением Ме в вариационных рядах можно отыскать значение признака у любой по порядку единицы ранжированного ряда. Например, можно найти значение признака у единиц, делящих ряд на 4, 10 или 100 равных частей. Эти величины называются ***квартили, децили, перцентили.***

Квартиль – значение признака, делящее ранжированную совокупность на 4 равные по численности части. Различают нижний квартиль Q_1, отделяющий $\frac{1}{4}$ части совокупности с наименьшими значениями признака, и квартиль верхний Q_3 , отделяющий $\frac{3}{4}$ части совокупности с наибольшими значениями признака. Это значит, что 25% единиц совокупности будут меньше по величине Q_1; 25% единиц будут заключены между

Q_1 и Q_2; 25% единиц будут заключены между Q_2 и Q_3 и 25% превосходят Q_3. Второй квартиль является медианой (средний квартиль).

Вычисление квартилей аналогично вычислению медианы. Сначала определяют положение или место квартиля:

$$N_{Q_1} = \frac{n+1}{4};\ N_{Q_2} = \frac{n+1}{4}\cdot 2 = \frac{n+1}{2};\ N_{Q_3} = \frac{n+1}{4}\cdot 3.$$

Затем по накопленным частотам в дискретном ряду определяют численное значение квартиля. В интервальном ряду распределения вначале указывают интервал, в котором находится квартиль, и определяют его численное значение по формуле

$$Q = X_Q + k\frac{N_Q - S_{Q-1}}{f_q},$$

где X_Q – нижняя граница интервала, в котором находится квартиль; S_{Q-1} – накопленная частота интервала, предшествующая тому, в котором находится квартиль; f_0 – частота интервала, в котором находится квартиль.

Продолжим решение ***примера 4.2*** распределения малых предприятий по стоимости основных производственных фондов (ОПФ) за год (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Распределение предприятий по стоимости ОПФ

Группы предприятий по стоимости ОПФ	Число предприятий, f	Накопленные частоты	Накопленные частоты, % к итогу	Середина интервала, x	Удельный вес предприятий
А	1	2	3	4	5
14–16	3	3	6	15	6
16–18	9	12	24	17	18
18–20	16	28	56	19	32
20–22	12	40	80	21	24
22 и более	10	50	100	23	20
Итого:	50	-	-	-	100

Производим накопление частот в % к итогу числа предприятий (графа 3 табл. 4.3). Определяем положение или место, в котором находится квартиль по накопленным частотам:

$$N_{Q_1} = \frac{n+1}{4} = \frac{50+1}{4} = 12{,}75;\ N_{Q_3} = \frac{n+1}{4}\cdot 3 = \frac{50+1}{4}\cdot 3 = 38{,}25.$$

Интервал, в котором находится квартиль: нижний – 18–20 с накопленной частотой 56%; верхний – 20–22 с накопленной частотой 80%.

Нижний квартиль:

$$Q_1 = X_{Q_1} + k\frac{N_Q - S_{Q-1}}{f_{Q_1}} = 18 + 2\frac{12{,}75-12}{16} = 18 + 0{,}39375 = 18{,}09375 \text{ млрд р.}$$

Верхний квартиль:

$$Q_3 = X_{Q_3} + k\frac{N_Q - S_{Q-1}}{f_{Q_3}} = 20 + 2\frac{32,75 - 28}{12} = 20 + 1,792 = 21,792 \text{ млрд р.}$$

Следовательно, 25% предприятий имеют стоимость ОПФ менее 18 млрд р., 25% – свыше 21 млрд р., а остальные предприятия имеют стоимость ОПФ в пределах от 18 млрд до 21 млрд р. по стоимости ОПФ.

Представляет интерес и расчет показателей, именуемых ***децилями*** (значение признака у единицы, делящей ранжированный ряд на десять частей). Это значит, что 10% единиц совокупности будут меньше по величине Q_1 и 10% превосходят Q_9. Вычисляются они по той же схеме, что медиана и квартили. Значения признака, делящие ряд на 100 частей, называются ***перцентилями***. Они применяются лишь при необходимости подробного изучения структуры вариационного ряда.

5. Показатели вариации

Абсолютные и относительные показатели отклонений от средней характеризуют колеблемость значений варьирующего признака и называются ***показателями вариации.***

Абсолютные показатели вариации:

1. ***Размах вариации*** – разность между крайними значениями вариант в ряду: $\mathbf{R = x_{max} - x_{min}}$. Этот показатель не дает обобщающей оценки колеблемости.

2. ***Среднее линейное отклонение*** – среднее из абсолютных отклонений от средней арифметической (отклонения берутся без учета положительных или отрицательных величин, т.е. по модулю):

а) формула простой: $\bar{d} = \frac{\sum|x - \bar{x}|}{n}$ (для несгруппированных данных);

б) формула взвешенной: $\bar{d} = \frac{\sum|x - \bar{x}| \cdot f}{\sum f}$ (для сгруппированный данных).

3. ***Дисперсия (средний квадрат отклонений)*** – средняя из квадратов отклонений от средней арифметической.

I метод:

а) формула простой: $\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$ (для несгруппированных данных);

б) формула взвешенной: $\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2 f}{\sum f}$ (для сгруппированных данных).

II метод – по теореме из теории вероятностей:

$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ – дисперсия равна разности между средней из квадрата признака и квадратом средней, которая может быть простой: $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$ или взвешенной: $\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2$.

4. ***Среднее квадратическое отклонение*** – корень квадратный из дисперсии $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, который удобно применять, если средняя величина рассчитывается способом моментов. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}$.

Относительные показатели вариации

1. ***Коэффициент осцилляции:*** $V_R = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100$.

2. ***Относительное линейное отклонение:*** $V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100$.

3. ***Коэффициент вариации:*** $V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$.

Они выражаются в процентах. Величина коэффициента вариации характеризует степень однородности совокупности (приблизительная оценка однородности – до 33%). Чем больше его величина, тем больше разброс значений признака вокруг средней, тем менее однородна совокупность по составу.

Пример 5.1 (на вычисление показателей вариации). Имеются выборочные данные о стаже работников коммерческих банков (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Стаж работы и численность работников коммерческих банков

Стаж, лет	Численность, чел., f	Середина интервала, x	$\frac{x-a}{k}$	$\left(\frac{x-a}{k}\right)f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$	$\left(\frac{x-a}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x-a}{k}\right)^2 f$	xf	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$	x^2	$x^2 f$
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<3	10	2	-1	-10	30	1	10	20	9	90	4	40
3–5	48	4	0	0	48	0	0	192	1	48	16	768
5–7	28	6	1	28	28	1	28	168	1	2	36	1008
7–9	10	8	2	30	30	4	40	80	9	90	64	640
>9	4	10	3	20	20	9	36	40	25	100	100	400
Итого:	100	-	-	50	156	-	114	500	-	356	-	2856

1. ***Размах вариации***: R = $X_{max} - X_{min}$ = 10 – 2 = 8 лет.

2. ***Среднее линейное отклонение***: $\bar{d} = \frac{\sum|x-\bar{x}|\cdot f}{\sum f} = \frac{156}{100} = 1{,}56$ лет.

3. ***Дисперсия по способу моментов***: $\sigma^2 = k^2(m_2 - m_1^2)$.

Находим средний стаж работников по формуле методом моментов: $x = km_1 + a$, где a = 4 при наибольшей частоте f = 48, k =(5 – 3) =2.

Момент первого порядка: $m_1 = \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)f}{\sum f} = \frac{50}{100} = 0{,}5$.

$\bar{x}$ = 2 · 0,5 + 4 = 1 + 4 = 5 лет – средний стаж работников.

Определяем дисперсию:

$m_2 = \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)^2 f}{\sum f}$, т.е. $m_2 = \frac{114}{100} = 1{,}14$ – момент второго порядка;

$$\sigma^2 = k^2(m_2 - m_1^2) = 2^2(1{,}114 - 0{,}5^2) = 4(1{,}14 - 0{,}25) = 4\cdot 0{,}89 = 3{,}56.$$

4. ***Среднее квадратическое отклонение*** – корень квадратный из дисперсии $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Определяем среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3{,}56} = 1{,}8867 \approx 1{,}9$ г.. Стаж работников банка отклоняется от среднего стажа 5 лет на 1,9 г. в ту и другую сторону, $\bar{x}$ = 5 ± 1,9 года.

5. ***Коэффициент осцилляции:*** $V_R = \frac{R}{\bar{x}}\cdot 100 = \frac{8}{5}\cdot 100 = 160\%$; разница между крайними значениями по стажу работы составляет 160% среднего значения.

6. ***Относительное линейное отклонение:***
$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}}\cdot 100 = \frac{1{,}56}{5}\cdot 100 = 31{,}2\%$; абсолютное отклонение от средней величины составляет 31,2%.

7) ***Коэффициент вариации:*** $V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot 100 = \frac{1{,}8867}{5}\cdot 100 = 37{,}75\%$, так как V_σ > 33%, следовательно, выборочное наблюдение о стаже работников коммерческих банков не является однородным и для дальнейшего анализа нужно пересмотреть исходный ряд распределения, исключив аномальные значения. Данный ряд нельзя использовать в целях прогноза.

Можно вычислить в данном примере среднюю величину и дисперсию ***обычным способом*** по сгруппированным данным для дискретного ряда распределения (см. табл. 5.1, гр. 8–12):

а) средний стаж работников: $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{500}{100} = 5$ лет;

б) средний квадрат (дисперсия): $\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{356}{100} = 3{,}56$;

в) кроме того, дисперсию можно вычислить по упрощенной формуле: $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$;

для сгруппированных данных:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum xf}{\sum f}\right)^2 = \frac{2856}{100} - 5^2 = 28{,}56 - 25 = 3{,}56.$$

Таким образом, получается одно и то же значение дисперсии независимо от применяемой формулы вычисления.

5.1. Дисперсия альтернативного признака

Альтернативными называются признаки, которыми обладает или не обладает данная единица совокупности. Обозначим: 1 – наличие признака; 0 – его отсутствие; p – доля единиц, обладающих данным признаком; q – доля единиц, не обладающих данным признаком.

Среднее значение альтернативного признака:

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1 \cdot p + 0 \cdot q}{p+q} = p, \text{ так как } p+q=1; \qquad \bar{x} = p.$$

Дисперсия альтернативного признака:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f} = \frac{(1-p)^2 p + (0-p)^2 q}{p+q} = \frac{q^2 p + p^2 q}{p+q} = pq; \qquad \sigma^2 = pq.$$

В тех случаях, когда значение дисперсии альтернативного признака неизвестно, принимают ее максимальное предельное значение $pq = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$.

5.2. Правило сложения дисперсий

Для статистической совокупности, сгруппированной по изучаемому признаку, возможно вычисление трех видов дисперсий: общей σ^2, частных (внутригрупповых) σ^2_i и межгрупповой δ^2.

Общая дисперсия характеризует вариацию всех единиц совокупности от общей средней и измеряет колеблемость результативного признака под влиянием всех действующих на него факторных признаков:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f} \text{ или } \sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}.$$

При разбивке всей совокупности на группы (частные совокупности) для каждой из них определяют среднюю $\bar{x}_1$ и дисперсию σ^2_i, где i – номер группы.

Групповая дисперсия характеризует вариацию признака в группе за счет случайных факторов. Средняя величина групповой вариации определяется средней из внутригрупповых дисперсий:

$$\overline{\sigma}_i^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum\sum (x - \overline{x}_i)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \text{ или } \overline{\sigma}_i^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i}.$$

Измерение вариации результативного признака за счет изучаемого (группировочного) фактора определяется ***межгрупповой дисперсией***:

$$\delta^2 = \frac{\sum (\overline{x}_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i} \text{ или } \delta^2 = \frac{\sum (\overline{x}_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}.$$

Между этими дисперсиями существует соотношение, которое называют ***правилом сложения дисперсий:*** общая дисперсия равна сумме средней из частных дисперсий и межгрупповой дисперсии:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma}_i^2 + \delta^2.$$

Если основанием группировки является факторный признак, то, используя правило сложения дисперсий, можно измерить силу его влияния на результативный признак, вычислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

Коэффициент детерминации равен отношению межгрупповой дисперсии к общей дисперсии:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2},$$

и показывает долю общей вариации результативного признака за счет вариации группировочного признака.

Корень квадратный из эмпирического коэффициента детерминации называется ***эмпирическим корреляционным отношением***:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}};$$

оно показывает тесноту связи между факторным и результативным признаками.

Эмпирическое корреляционное отношение изменяется от 0 до 1.

Чем значение η ближе к 1, тем теснее, ближе к функциональной зависимости связь между признаками. Для качественной оценки тесноты связи на основе показателя эмпирического корреляционного отношения можно воспользоваться соотношением Чеддока: связь между признаками: 0,1÷0,3 – слабая; 0,3÷0,5 – умеренная; 0,5÷0,7 – заметная; 0,7÷0,9 – тесная; 0,9÷0,99 – весьма тесная.

Пример 5.2 (на правило сложения дисперсий). При изучении влияния квалификации (тарифного разряда) рабочих на уровень производительности труда в цехе были получены следующие данные (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Распределение рабочих по среднечасовой выработке изделий

Рабочие IV разряда					Рабочие V разряда				
№ п/п	Выработка, шт., y_i	$y-\bar{y}_i$	$(y-\bar{y}_i)^2$	$(y-\bar{y})^2$	№ п/п	Выработка, шт., y_i	$y-\bar{y}_i$	$(y-\bar{y}_i)^2$	$(y-\bar{y})^2$
1	12	-2	4	0					
2	9	-1	1	9	1	14	-1	1	4
3	9	-1	1	9	2	14	-1	1	4
4	10	0	0	4	3	15	0	0	9
5	7	3	9	25	4	17	2	4	25
6	13	3	9	1					
∑	60	-	24	48	∑	60		6	42

Вычислить:

1) групповые дисперсии;
2) среднюю из внутригрупповых дисперсий;
3) межгрупповую дисперсию;
4) общую дисперсию;
5) проверить правило сложения дисперсий;
6) коэффициент детерминации;
7) эмпирическое корреляционное отношение.

В примере данные группируются по квалификации (тарифному разряду) рабочих, являющейся факторным признаком **x**. Результативный признак y_i , варьируется под влиянием как систематического фактора **x** – квалификации, так и других неучтенных случайных факторов (внутригрупповая вариация). Необходимо измерить эту вариацию с помощью дисперсий.

1. ***Средняя выработка*** по каждой группе и общая средняя по формуле средней арифметической простой $\bar{y}_i = \frac{\sum y_i}{n}$.

По первой группе $\bar{y}_i = \frac{60}{6} = 10$; по второй группе $\bar{y}_i = \frac{60}{4} = 15$; по двум группам вместе: $\bar{y}_i = \frac{\sum y_i f}{\sum f} = \frac{10 \cdot 6 + 15 \cdot 4}{10} = \frac{120}{10} = 12$.

Вычисление внутригрупповых дисперсий проводится по формуле простой по каждой группе:

$$\text{первая } \sigma_i^2 = \frac{\sum (y - \bar{y}_i)^2}{n} = \frac{24}{6} = 4; \text{ вторая } \sigma_i^2 = \frac{\sum (y - \bar{y}_i)^2}{n} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

Внутригрупповые дисперсии показывают вариации выработки в каждой группе, вызванные всеми возможными факторами, кроме различий в квалификационном разряде, так как внутри группы все рабочие имеют одну квалификацию.

2. ***Средняя из внутригрупповых дисперсий***:

$$\overline{\sigma_i^2} = \frac{\sum \sigma_i^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{4 \cdot 6 + 1{,}5 \cdot 4}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

Эта дисперсия отражает вариацию выработки, обусловленную всеми случайными факторами, кроме квалификации рабочих в среднем по всей совокупности.

3. ***Межгрупповая дисперсия***:

$$\delta^2 = \frac{\sum(\bar{y}_i - \bar{y})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{(10-12)^2 \cdot 6 + (15-12)^2 \cdot 4}{6+4} = \frac{24+36}{10} = \frac{60}{10} = 6.$$

Межгрупповая дисперсия характеризует вариацию групповых средних, обусловленную различиями групп рабочих по квалификации.

4. ***Общая дисперсия***:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(y - \bar{y})^2}{n} = \frac{48+42}{10} = \frac{90}{10} = 9.$$

Общая дисперсия отражает суммарное влияние всех возможных факторов на общую вариацию среднечасовой выработки изделий всеми рабочими цеха.

5. ***Правило сложения дисперсий***:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2 = 6 + 3 = 9.$$

Общая дисперсия равна сумме средней из внутригрупповых дисперсий и межгрупповой дисперсии.

6. ***Коэффициент детерминации***:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma^2} = \frac{6}{9} = 0{,}6667, \text{ или } 66{,}67\%.$$

Следовательно, на 66,67% вариация производительности труда рабочих вызвана различиями в их квалификации и на (100 – 66,67) = 33,33% – влиянием всех прочих неучтенных случайных факторов.

7. ***Эмпирическое корреляционное отношение***:

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}} = \sqrt{0{,}6667} \approx 0{,}812,$$

что свидетельствует о тесной связи между квалификацией рабочих и производительностью их труда (по шкале Чеддока).

6. Выборочное наблюдение

Выборочное наблюдение относится к числу несплошных наблюдений, при которых обследуется часть единиц совокупности, а результаты обследования распространяются на всю совокупность. Выделяются две совокупности данных. ***Генеральная*** – совокупность, из которой отбираются единицы для выборочного их обследования. ***Выборочная*** – совокупность отобранных для обследования единиц. Показатели этих совокупностей, называемые генеральными или выборочными, используемые в анализе, представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Показатели генеральной и выборочной совокупностей

Показатели	Условное обозначение показателей в совокупностях	
	генеральной	выборочной
А	1	2
Численность единиц	N	n
Численность единиц, обладающих изучаемым признаком	M	m
Численность единиц, не обладающих изучаемым признаком	N – M	n – m
Доля единиц обладающих изучаемым признаком	$p = \frac{M}{N}$ генеральная доля	$\omega = \frac{m}{n}$ частность
Доля единиц, не обладающих изучаемым признаком	$q = 1 - p$ $(p+q = 1)$	$1 - \omega$
Средняя величина изучаемого признака	$\bar{x}$	$\tilde{x}$
Дисперсия	σ^2	$\tilde{\sigma}^2$
Среднее квадратическое отклонение	σ	$\tilde{\sigma}$

6.1. Способы отбора выборочного наблюдения

Различают четыре основных способа отбора в выборочную совокупность.

1. ***Случайный*** – отбор, при котором каждая единица генеральной совокупности имеет равную возможность попасть в выборку. Выборка в этом случае называется собственно случайной. Случайный отбор является ***повторным*** – каждая единица генеральной совокупности может попасть в выборку столько раз, сколько раз производится отбор. При ***бесповторном отборе*** каждая единица генеральной совокупности попадает в выборку только один раз.

2. ***Механический отбор*** по точности результатов близок к собственно случайному. Производится не по жребию, а по списку единиц генеральной совокупности, расположенному в определенном порядке. Для учета отклонений (ошибок выборки) применяют формулы случайного (бесповторного) отбора.

3. При ***типическом отборе*** вся обследуемая совокупность разбивается на типические группы, из которых в порядке собственно случайной или механической выборки отбирается нужное число единиц для выборочного их обследования.

4. При ***серийной (гнездовой)*** выборке методом случайного или механического отбора производят отбор групп, которые обследуют сплошным путем.

Кроме того, используют различные способы комбинирования выборок (например, серийной и случайной). Выборки, при которых наблюдение охватывает небольшое число единиц ($n < 30$), называют ***малыми***.

Задача выборочного наблюдения – по выборочным данным сделать заключение о генеральной совокупности. Чтобы оценить степень точности проведения выборочного наблюдения, необходимо определить ошибки выборки, т.е. размер отклонений выборочных показателей от генеральных по абсолютным ($\bar{x} - \tilde{x}$) и относительным (p – ω) величинам изучаемых признаков. Выделяют два вида ошибок:

1) ***ошибки регистрации*** – погрешности, возникающие из-за неправильной записи данных об отдельных исследуемых единицах (они устраняются путем контроля);

2) ***ошибки репрезентативности*** – расхождения между показателями выборочной и генеральной совокупности при отсутствии ошибок регистрации. Ошибки репрезентативности могут быть ***систематическими,*** возникающими вследствие нарушений правил и принципов отбора данных, и ***случайными***, возникающими из-за несплошного характера наблюдений, состоящими в том, что выборочные данные в точности не воспроизводят данных генеральной совокупности.

Различают два вида ***случайных ошибок***: ***среднюю и предельную***.

Средняя ошибка **μ** характеризует средний размер случайных отклонений выборочных показателей от генеральных.

Предельная ошибка характеризует гарантированный размер отклонений $\boldsymbol{\Delta = \mu t}$, где t – коэффициент, гарантирующий результат с определенной вероятностью, – ***коэффициент доверия***. Наиболее употребительными для экономических расчетов являются следующие значения величины t при соответствующих значениях Ф(t) (вероятности P):

t	1	1,64	1,96	2,0	3	3,5
Ф(t)	0,653	0,900	0,95	0,954	0,997	0,999

С увеличением значения *t* величина вероятности *P* быстро приближается к единице.

При t = 1 предельная ошибка Δ = μ, и с вероятностью P = 0,683 можно утверждать, что разность между выборочными и генеральными показателями не превысит одной средней ошибки ±1μ. При t = 2 с вероятностью P = 0,954 она не выйдет за пределы ±2μ, при t = 3 с P = 0,997 – за пределы ±3μ и т.д.

В общем случае предельная ошибка собственно случайной выборки вычисляется по формуле (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Формулы предельных ошибок собственно случайной выборки

Способы случайного отбора	Предельная ошибка выборки	
	для средней величины	для доли единиц
Повторный	$\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}}$ (1)	$\Delta_\omega = t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$ (2)
Бесповторный	$\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$ (3)	$\Delta_\omega = t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$ (4)

В этих формулах, чаще всего из-за отсутствия данных генеральной совокупности о дисперсиях, вместо дисперсии количественного признака в генеральной совокупности σ^2 применяют выборочные данные $\tilde{\sigma}^2$; дисперсию альтернативного признака pq генеральной совокупности заменяют на дисперсию выборочных данных $\omega(1 - \omega)$.

С заданной вероятностью можно утверждать, что значение ***генеральной средней*** следует ожидать в пределах от $\tilde{x} - \Delta_x$ до $\tilde{x} + \Delta_x$, для ***генеральной доли***: $\omega - \Delta_\omega$ и $\omega + \Delta_\omega$.

Выборочное наблюдение проводится с целью распространения выводов, полученных по данным выборки, на генеральную совокупность. Предельная ошибка позволяет определить предельные значения характеристик генеральной совокупности и их доверительные интервалы:

для средней: $\bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_x$; $\tilde{x} - \Delta_x \le \bar{x} \le \tilde{x} + \Delta_x$;

для доли: $P = \omega \pm \Delta_\omega$; $\omega - \Delta_\omega \le P \le \omega + \Delta_\omega$.

Пример 6.1. Для определения скорости расчетов с кредиторами предприятий и корпорации в коммерческом банке была проведена случайная выборка 100 платежных документов, по которым средний срок перечисления и получения денег оказался равным 23 дням ($\tilde{x} = 23$) со стандартным отклонением $\tilde{\sigma} = 7$ дней.

С вероятностью P = 0,954 определить предельную ошибку выборочной средней и доверительные интервалы, в которых находится генеральная средняя продолжительность расчетов предприятий данной корпорации.

По условию задачи выборка является повторной и вычисление предельной ошибки производится по формуле (1) табл. 6.2:

$$\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}} = \sqrt{\frac{49}{100}} = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4.$$

Генеральная средняя $\bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_x$ и ее доверительные интервалы:

$\bar{x} = 23 \pm 1{,}4$; $23 - 1{,}4 \le \bar{x} \le 23 + 1{,}4$; $21{,}6 \le \bar{x} \le 24{,}4$.

С вероятностью Р = 0,954 можно утверждать, что средняя продолжительность расчетов предприятий данной корпорации колеблется в пределах от 21,6 до 24,4 дня.

Пример 6.2. Для определения среднего срока пользования краткосрочным кредитом в банке была произведена 5%-ная механическая выборка, в которую вошли 100 счетов. В результате обследования установлено, что средний срок пользования краткосрочным кредитом $\tilde{x}$=30 дней при среднем квадратическом отклонении $\tilde{\sigma}$ = 9 дней. В пяти счетах срок пользования кредитом превышал 60 дней. С вероятностью Р = 0,954 определить пределы, в которых будет находиться срок пользования краткосрочным кредитом в генеральной совокупности и доля счетов со сроком пользования краткосрочным кредитом более 60 дней.

1. Так как выборка 5%-ная механическая, предельная ошибки выборки для средней находится по формуле (3) табл. 6.2:

$$\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}, \qquad \bar{x} = \tilde{x} \pm \Delta_x;$$

$$\Delta_x = 2\sqrt{\frac{81}{100}(1-0{,}05)} = 1{,}75 \approx 2 \text{ дня}, \ \bar{x} = 30 \pm 2 \text{ дня}.$$

С вероятностью Р = 0,954 можно утверждать, что срок пользования краткосрочным кредитом в банке находится в пределах 30 – 2 ≤ $\bar{x}$ ≤ 30 + 2, т.е. от 28 до 32 дней.

2. Доля кредитов сроком пользования более 60 дней находится в пределах:

$$\omega - \Delta_\omega \le P \le \omega + \Delta_\omega.$$

Выборочная доля $\omega = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = 0{,}05.$

Предельную ошибку выборки для доли находим по формуле (4) табл. 6.2:

$$\Delta_\omega = t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)},$$

$$\Delta_\omega = 2\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{100}\left(1-0{,}05\right)} = 0{,}042, \text{ или } 4{,}2\%.$$

$$P = \omega \pm \Delta_\omega; \quad P = 0{,}5 \pm 0{,}042, \text{ или } P = 5 \pm 4{,}2\%; \quad 0{,}8 \le P \le 9{,}2\%.$$

С вероятностью Р = 0,954 можно утверждать, что доля кредитов в банке со сроком пользования более 60 дней будет находиться в пределах от 0,8 до 9,2%.

6.2. Определение необходимого объема выборки

Определение необходимого объема выборки – основное условие репрезентативности данных. Численность выборки определяется на основе формул предельных ошибок выборки Δ_x или Δ_ω в соответствии с определенным способом отбора данных. Если отбор не определен, то можно воспользоваться формулой **случайного повторного отбора**, численность выборки будет максимальной (табл. 6.3):

$$n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2}{\Delta_x^2} \text{ – для средней величины;}$$

$$n = \frac{t^2\omega(1-\omega)}{\Delta_\omega^2} \text{ – для доли.}$$

Таблица 6.3

Определение необходимого объема выборки

Способ отбора выборки	Численность выборки	
	для средней величины	для доли
Повторный	$n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2}{\Delta_x^2}$ (1)	$n = \frac{t^2\omega(1-\omega)}{\Delta_\omega^2}$ (2)
Бесповторный (механический)	$n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2\tilde{\sigma}^2}$ (3)	$n = \frac{t^2\omega(1-\omega)N}{\Delta_\omega^2 N + t^2\omega(1-\omega)}$ (4)

Формулы показывают, что с увеличением предполагаемой ошибки выборки значительно уменьшается необходимый объем выборки.

1. При отсутствии данных о дисперсии для средней приблизительно вычисляют ее по формуле $\tilde{\sigma}^2 = 1/6(x_{max} - x_{min})$; дисперсия альтернативного признака может быть взята максимальной pq = 0,5·0,5 = 0,25, т.е. выборочная дисперсия ω(1–ω) может быть заменена генеральной.

2. Если отсутствуют данные о коэффициенте доверия t, принимают его значение t = 2 при вероятности 0,954, достаточной для экономических исследований и расчетов.

3. Если неизвестна величина предельной ошибки Δ, принимают 5%-ный коэффициент репрезентативности.

Пример 6.3. Для определения среднего возраста 1300 студентов департамента необходимо провести выборочное обследование. Предварительно установлено, что среднее квадратическое отклонение возраста студентов $\tilde{\sigma}$ = 8 лет. Сколько нужно обследовать студентов, чтобы с вероятностью Р = 0,954 средняя ошибка выборки не превышала 2 г.?

1. При повторном способе отбора по формуле (1) табл. 6.3:

$$n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2}{\Delta_x^2} = \frac{2^2 \cdot 8^2}{2^2} = 64.$$

При повторном способе отбора нужно обследовать 64 студента с вероятностью Р = 0,954.

2. При бесповторном способе отбора по формуле (3) табл. 6.3:

$$n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2\tilde{\sigma}^2} = \frac{2^2 \cdot 8^2 \cdot 1300}{1300 \cdot 2^2 + 8^2 \cdot 2^2} = \frac{332800}{5456} = 61.$$

При бесповторном способе отбора нужно обследовать 61 студента при вероятности Р = 0,954. Следовательно, бесповторный способ отбора является более точным.

7. Ряды динамики

Ряды динамики – это количественные значения показателей, характеризующие развитие и изменение общественных явлений и процессов во времени.

В зависимости от характера изучаемых явлений различают моментные и интервальные (периодические) ряды динамики. ***Моментным рядом*** называется ряд величин, характеризующих размер данного явления на определенный момент времени или дату. ***Интервальным (периодическим) рядом*** динамики называют ряд величин, характеризующих размер явления за определенные периоды времени.

7.1. Аналитические показатели ряда динамики

Для более глубокого изучения общественных явлений и их анализа исчисляют аналитические показатели ряда динамики: уровень ряда, абсолютный прирост, темп роста, темп прироста, средние темпы роста и прироста, абсолютное значение 1% прироста.

Уровень ряда – числовое значение показателя, характеризующего величину, размер явлений. Если в качестве предыдущего уровня берется непосредственно предшествующий уровень, то получаем ***цепные показатели*** ряда, а если один и тот же уровень для всего ряда, то имеем ***базисные показатели*** ряда: $\mathbf{y_i}$ – любой уровень ряда начиная со второго; $\mathbf{y_{i-1}}$ – уровень, непосредственно предшествующий данному; $\mathbf{y_0}$ – уровень первого члена динамического ряда.

Абсолютный прирост – это разность между последующим и предыдущим уровнями ряда или между последующим и одним и тем же постоянным уровнем, взятым за базу сравнения.

Абсолютные приросты исчисляют в тех же единицах, что и исходный ряд динамики. Вычисляют ***цепные*** и ***базисные*** абсолютные приросты.

Цепной абсолютный прирост: $\Delta_ц = y_i - y_{i-1}$.

Базисный абсолютный прирост: $\Delta_б = у_i - у_0$.

Сумма цепных абсолютных приростов равна базисному абсолютному приросту за один и тот же период времени $\sum\Delta_ц = \Delta_б$.

Темпы роста также рассчитываются ***цепные и базисные***. ***Темп роста цепной*** определяется как отношение каждого из уровней ряда динамики к уровню предыдущего периода, а ***базисный*** как отношение каждого из уровней к первому, принимаемому за постоянную базу сравнения.

Формулы исчисления темпов роста:

Цепной темп роста: $Т_{рц} = \dfrac{у_i}{у_{i-1}} \cdot 100.$

Базисный темп роста: $Т_{рб} = \dfrac{у_i}{у_0} \cdot 100,$

где $Т_{рц}$ – темп роста цепной, %; $Т_{рб}$ – темп роста базисный, %. Между базисными и цепными темпами роста, выраженными в форме коэффициентов, существует взаимосвязь.

1. Произведение цепных темпов роста равно соответствующему базисному темпу роста за тот же период времени:

$$\prod Т_{рц} = Т_{рб}; \qquad \frac{у_1}{у_0} \cdot \frac{у_2}{у_1} \cdot \frac{у_3}{у_2} = \frac{у_3}{у_0} = Т_{рб}.$$

2. Зная базисные коэффициенты роста можно получить цепные коэффициенты роста путем деления соответствующего базисного темпа роста на предыдущий:

$$\frac{у_3}{у_0} : \frac{у_2}{у_0} = \frac{у_3}{у_2} = Т_{рц}.$$

Темпы прироста исчисляются чаще всего как разность между темпами роста (выраженными в процентах) минус 100, т.е. $Т_{пр} = Т_р - 100$; если в коэффициентах: $К_{пр} = К_р - 1$. Можно исчислять темпы прироста путем деления абсолютных приростов на уровень, принятый за базу при расчетах. Темпы прироста также исчисляют базисные и цепные.

Абсолютное значение одного процента прироста определяют как отношение абсолютного прироста (цепного) к темпу прироста (цепному). Абсолютное значение 1% прироста равно 0,01 предшествующего уровня ряда динамики: $А = 0{,}01 \cdot у_{i-1}$. Результаты вычисления заносим в табл. 7.1.

Пример 7.1. Производство телевизоров характеризуется следующими данными (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Производство телевизоров за полугодие

Месяц	Произведено, тыс. шт.	Абсолютный прирост, тыс. шт.		Коэффициент роста		Коэффициент прироста		Абсолютное значение 1% прироста $0{,}01 \cdot y_{i-1}$
		Цепной $\Delta_ц = y_i - y_{i-1}$	Базисный $\Delta_б = y_i - y_0$	Цепной $К_{рц} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$	Базисный $К_{рб} = \frac{y_i}{y_0}$	Цепной $К_{пр} = К_р - 1$	Базисный $К_{пр} = К_р - 1$	
I	2,3	-	-	-	1,000	-	-	-
II	2,7	0,4	0,4	1,174	1,174	0,174	0,174	0,023
III	2,6	-0,1	0,3	0,963	1,130	-0,037	1,130	0,027
IV	2,6	0	0,3	1,000	1,130	0	0,130	0,026
V	2,4	-0,2	0,1	0,923	1,043	-0,077	0,043	0,026
VI	2,5	0,1	0,2	1,042	1,087	0,042	0,087	0,024

Пример 7.2. Производство холодильников за ряд лет составило, %: 2008 г. – 106,4; 2009 г. – 108,7; 2010 г. – 105,8; 2011 г. – 107,2; 2012 г. – 106,8. Вычислить рост производства холодильников в 2012 г. по сравнению с 2008 г.

Так как в процентах никаких вычислений не производится, переводим их в коэффициенты, приняв за базу 2008 г., в котором производство холодильников составило 100%, или 1. Используя первое свойство темпов роста (произведение цепных темпов роста равно базисному темпу роста), это же свойство справедливо и для коэффициентов.

$$К_{р_б \frac{y_{2012}}{y_{2008}}} = 1{,}064 \cdot 1{,}087 \cdot 1{,}058 \cdot 1{,}072 \cdot 1{,}068 = 1{,}40.$$

Производство холодильников в 2012 г. возросло по сравнению с 2008 г. на (140 – 100) = 40%.

Пример 7.3. Производство велосипедов за ряд лет составляло, шт.: 2010 г. – 1100; 2011 г. – 1600; 2012 г. – 1800. Используя второе свойство взаимосвязи между базисными и цепными темпами роста, определить цепной коэффициент роста в 2011 г.

Вычисляем базисные коэффициенты роста $К_{р1}$ и $К_{р2}$, затем путем их деления находим цепной рост:

$$К_{р1\frac{2011}{2010}} = \frac{1600}{1100} = 1{,}454; \quad К_{р2\frac{2012}{2010}} = \frac{1800}{1100} = 1{,}636;$$

$$К_{р_ц} = \frac{К_{р2\frac{2012}{2010}}}{К_{р1\frac{2011}{2010}}} = \frac{1{,}636}{1{,}454} = 1{,}125, \text{ или } 112{,}5\%.$$

Проверка – непосредственно из определения цепного показателя:

$$К_{рц} = \frac{у_{2012}}{у_{2011}} = \frac{1800}{1600} = 1{,}125.$$

Частное от деления двух базисных темпов роста равно цепному темпу роста и составляет 112,5%.

7.2. Средние показатели ряда динамики

Система средних показателей динамики включает: средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средний темп роста и средний темп прироста.

Средний уровень ряда – это показатель, обобщающий итоги развития явления за единичный интервал или момент из имеющейся временной последовательности. Расчет среднего уровня зависит от вида ряда и величины интервала, соответствующего каждому уровню.

Для интервального ряда динамики:

а) с ***равными периодами времени*** средний уровень определяется по формуле ***средней арифметической простой***: $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$,

где $\bar{y}$ – средний уровень ряда; n – число уровней ряда.

Пример 7.4. По данным табл. 7.1 определить среднемесячное производство телевизоров.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{2{,}3 + 2{,}7 + 2{,}6 + 2{,}6 + 2{,}4 + 2{,}5}{6} = \frac{15{,}1}{6} = 2{,}52 \text{ тыс.шт.} = 2520 \text{ шт.}$$

Среднемесячное производство телевизоров за изучаемый период времени составляло 2,52 тыс.шт.;

б) с ***неравными периодами времени*** средний уровень находится по формуле ***средней арифметической взвешенной***: $\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t}$,

где t – период времени между датами.

Пример 7.5. Имеются данные о численности работников фирмы за сентябрь (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Численность работников фирмы в сентябре

Даты	Численность, чел.	Период времени t, дни
с 1 по 15	28	15
с 16 по 25	32	10
с 26 по 30	34	5

$$\bar{y} = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t} = \frac{28 \cdot 15 + 32 \cdot 10 + 34 \cdot 5}{15 + 10 + 5} = \frac{910}{30} \approx 30 \text{ чел.}$$

Средняя численность работников фирмы за сентябрь месяц составила 30 чел.

Для моментного ряда динамики:

а) ***с равноотстоящими уровнями*** средний уровень определяется по формуле ***средней хронологической простой***:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1},$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – уровни периода времени, за который делается расчет; n – число уровней; (n–1) – длительность периода времени.

Пример 7.6. Имеются данные о валютном курсе, установленном ЦБ РФ на каждый день (рубль/доллар) (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Валютный курс ЦБ РФ

19.12.12	20.12.12	21.12.12	22.12.12	23.12.12	24.12.12
30,31	30,28	30,26	30,08	30,08	30,08

$$\bar{y} = \frac{\frac{30{,}31}{2} + 30{,}28 + 30{,}26 + 30{,}08 + 30{,}08 + \frac{30{,}08}{2}}{6-1} = \frac{150{,}895}{5} = 30{,}18 \text{ р.}$$

Средний курс доллара за неделю составил 30,18 р.;

б) ***с неравноотстоящими уровнями*** средний уровень определяется по формуле ***средней хронологической взвешенной***:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \ldots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-1})} \text{ или } \bar{y} = \frac{\sum (y_i + y_{i+1})t_{n-1}}{2\sum t_{n-1}},$$

где t – интервал времени между смежными уровнями.

Пример 7.7. Имеются данные о товарных запасах розничного торгового предприятия за год (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Запасы розничного торгового предприятия, млн р.

На 01.01.12	На 01.05.12	На 01.08.12	На 01.01.13
61,1	57,5	51,3	74,7

Среднегодовой товарный запас розничного торгового предприятия составил:

$$\bar{y} = \frac{(61{,}1 + 57{,}5) \cdot 4 + (57{,}5 + 51{,}3) \cdot 3 + (51{,}3 + 74{,}7) \cdot 5}{2 \cdot (4 + 3 + 5)} = \frac{1430{,}8}{24} = 59{,}62 \text{ млн р.}$$

Исчисление среднего уровня для неравных интервалов, если отсутствует последний уровень, производится также по формуле средней арифметической взвешенной: $\bar{y} = \frac{\sum y_i t}{\sum t}$,

где t – период времени между датами.

Вычисление средних показателей ряда динамики. Показатели определяются из табл. 7.1.

Пример 7.8. ***Среднемесячный абсолютный прирост*** находится по формулам:

$$\bar{\Delta}_y = \frac{y_n - y_0}{n-1} \text{ или } \bar{\Delta}_y = \frac{\Delta_{баз}}{n-1} \text{ или } \bar{\Delta}_y = \frac{\sum \Delta_{цеп}}{n-1};$$

$$\bar{\Delta}_y = \frac{2{,}5 - 2{,}3}{6-1} = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04 \text{ тыс. шт.} = 40 \text{ шт.}$$

Ежемесячно средний абсолютный прирост составлял 40 телевизоров.

Для обобщающей характеристики всего ряда динамики исчисляется ***среднемесячный темп роста*** по формуле средней геометрической простой:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{T_{p_1} \cdot T_{p_2} \cdot T_{p_3} \cdot \ldots \cdot T_{p_{n+1}}}; \quad \bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\prod T_{p_{цеп}}},$$

где П – знак произведения.

Темпы роста при этом должны быть выражены в коэффициентах. В соответствии с взаимосвязью базисных и цепных коэффициентов роста среднемесячный темп роста может быть определен по модифицированной формуле как отношение конечных уровней:

$$\bar{T}_p = \sqrt[6-1]{1{,}174 \cdot 0{,}963 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}923 \cdot 1{,}042} = \sqrt[5]{1{,}087} = 1{,}017, \text{ или } 101{,}7\%,$$

или по формуле:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}}; \; \bar{T}_p = \sqrt[6-1]{\frac{2{,}5}{2{,}3}} = \sqrt[5]{1{,}087} = 1{,}017.$$

Среднемесячный темп роста связан со среднемесячным темпом прироста тем же соотношением, а именно:

$$\bar{T}_{пр} = \bar{T}_p - 100; \qquad \bar{T}_{пр} = 101{,}7 - 100 = 1{,}7\%.$$

Следовательно, среднемесячный темп роста телевизоров составлял 101,7%, а среднемесячный темп прироста – 1,7%.

7.3. Выявление основной тенденции ряда динамики

Существует несколько способов выявления основной тенденции ряда (***тенденция*** – общее направление развития). Наиболее точным и используемым является метод аналитического выравнивания. Чаще всего экономические явления и процессы описываются ***линейной моделью тренда***. ***Тренд*** – изменение во времени отклонений фактических уровней от выравненных.

Уравнение прямой имеет вид $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t$, где $\hat{y}_t$ – уровни ряда, выравненные по фактору времени; t – период времени; a_0 и a_1 – параметры прямой. Для нахождения параметров a_0 и a_1 – используют систему нормальных уравнений, полученных по способу наименьших квадратов:

$$\sum (y - \hat{y}_t)^2 = \min .$$

В этом случае сумма квадратов отклонений имеет минимальное значение. Система нормальных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y \cdot t \end{cases},$$

где n – число уровней ряда динамики.

Для упрощения расчетов параметр t можно подобрать так, чтобы $\sum t_{усл} = 0$.

Тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases} a_0 n = \sum y \\ a_1 \sum t^2 = \sum y \cdot t \end{cases}$,

откуда $a_0 = \frac{\sum y}{n}$; $a_1 = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t^2}$.

При нечетном числе уровней ряда динамики период времени в середине ряда приравнивается к 0, а периоды вверх от него обозначают –1, –2, – 3 и т.д., вниз +1, +2, +3 и т.д. Если ***число членов ряда четное***, то два периода, лежащих в середине, обозначают –1, +1, вверх –3, –5 и т.д., вниз +3, +5 и т.д. Рассмотрим пример 7.9.

Пример 7.9. Имеются данные о производстве продукции за 2007–2012 гг. (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Динамика объема продукции по предприятию

Показатель	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Объем продукции, тыс. шт.	28,4	30,6	34,4	36,8	38,2	44,1

Определить линейную форму тренда и рассчитать интервальный прогноз производства продукции в 2014 г. тремя методами, гарантируя результат с вероятностью 0,95. Построить график исходных и выравненных рядов. Для решения составляем табл. 7.6.

Таблица 7.6

Динамика объема производства продукции за 2007–2012 гг.

Годы	Произведено продукции, тыс.шт., y_i	Условная величина, t	t^2	yt	$\hat{y}_t$
1	2	3	4	5	6
2007	28,4	-5	25	-142	28,012
2008	30,6	-3	9	-91,8	30,974
2009	34,4	-1	1	-34,4	33,936
2010	36,8	+1	1	36,8	36,898
2011	38,2	+3	9	114,6	39,860
2012	44,1	+5	25	220,5	42,822
Итого	212,5	-	70	103,7	212,502

1. Определим тенденцию роста производства продукции по уравнению прямой: $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t$. Находим параметры a_0, a_1 из системы нормальных уравнений:

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{212,5}{6} = 35,417; \qquad a_1 = \frac{\sum y \cdot t}{\sum t^2} = \frac{103,7}{70} = 1,481.$$

Уравнение прямой (***линейная форма тренда***) имеет вид:

$$\hat{y}_t = 35,417 + 1,481 \cdot t.$$

Коэффициент a_0 характеризует величину среднего ряда динамики, т.е. среднего объема производства за изучаемый период с 2007 по 2012 г., в размере 35,417 тыс. шт. Коэффициент a_1 характеризует величину среднегодового абсолютного прироста за изучаемый период в размере 1,481 тыс. шт. в год.

2. Для вычисления теоретических уровней последовательно подставляем значения величины t в полученное уравнение регрессии $\hat{y}_t = a_0 + a_1 \cdot t$. Полученные значения теоретических уровней заносим в табл. 7.6 (графа 6). Правильность вычислений подтверждается равенством сумм:

$$\sum y_i = \sum y_t \text{ (графы 2 и 6 табл. 7.6).}$$

Спрогнозируем уровень объема производства на 2014 г. Предполагая, что выявленная закономерность сохранится и в дальнейшем, спрогнозировать объем производства можно, используя в качестве закономерности метод аналитического выравнивания.

3. Экстраполируем ряд динамики по методу аналитического выравнивания. В полученное уравнение регрессии теоретических уровней подставляем значения t за пределами исследуемого ряда.

Рассчитываем для t вероятностные значения $\hat{y}_t$ из уравнения регрессии: t = 5 + 4 (прогноз) = 9.

Прогноз (табл. 7.6): условная величина t (графа 3) 2012 – 5; 2013 – 7; 2014 – 9. Исходя из условий примера ежегодно условная величина t увеличивается на 2 единицы, прогноз t = 2 г. (2012–2014 гг.).

Тогда объем производства в 2014 г. составит:

$$\hat{y}_{n+t} = a_0 + a_1 t; \qquad \hat{y}_{n+t} = 35{,}417 + 1{,}481 \cdot 9 = 48{,}746 \text{ тыс. шт.}$$

1. ***Метод аналитического выравнивания:*** прогноз производства деталей составил 48,746 тыс. шт.

2. ***Средний абсолютный прирост:*** в данном примере время прогноза t = 2 года.

$$\hat{y}_{n+t} = y_n + \overline{\Delta} \cdot t.$$

Находим средний абсолютный прирост:

$$\overline{\Delta} = \frac{y_n - y_0}{n-1} = \frac{44{,}1 - 28{,}4}{6-1} = \frac{15{,}7}{5} = 3{,}14 \text{ тыс. шт.}$$

Прогноз $\hat{y}_{n+t} = 44{,}1 + 3{,}14 \cdot 2 = 44{,}1 + 6{,}28 = 50{,}38$ тыс. шт.

3. ***Средний темп роста:***

$$\hat{y}_{n+t} = y_n \cdot (T_p)^t; \; t = 2 \text{ г.}$$

Средний темп роста:

$$\overline{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}} = \sqrt[6-1]{\frac{44{,}1}{28{,}4}} = \sqrt[5]{1{,}5528} = 1{,}086, \text{ или } 108{,}6\%.$$

Прогноз $\hat{y}_{n+t} = 44{,}1 \cdot 1{,}086^2 = 52{,}011$ тыс. шт.

Используя различные методы прогноза, получают разные результаты. Наиболее точным считается прогнозирование методом аналитического выравнивания.

На практике результат прогнозирования явлений обычно получают не точечными, а интервальными оценками, используя распределение Стьюдента.

7.4. Выявление сезонных колебаний

Сезонные колебания – периодические колебания, возникающие под влиянием смены времен г.. Для этого необходимо иметь данные не менее чем за три г.. Если ряд динамики не содержит явно выраженной тенденции развития, то индексы сезонности исчисляют непосредственно по эмпирическим данным без их предварительного выравнивания. Этот метод называется методом простой (постоянной) средней.

Индекс сезонности – процентное отношение средних для каждого месяца (или квартала) $\overline{y}_i$ к общему среднему уровню $\overline{y}$:

$$I_{сез} = \frac{\overline{y}_i}{\overline{y}} \cdot 100.$$

Пример 7.10. Реализация картофеля в супермаркетах города за три г. характеризуется следующими данными (табл. 7.7).

Таблица 7.7

Реализация картофеля в супермаркетах города

Месяц	Реализация картофеля, т				Среднемесячная реализация за 3 года	Индекс сезонности, %, $I_{сез}$
	2011	2012	2013	Сумма за 3 года		
А	1	2	3	4	5	6
Январь	70	71	63	204	68	26,3
Февраль	71	85	60	216	72	27,6
Март	82	84	59	225	75	28,7
Апрель	190	308	261	759	253	96,9
Май	280	383	348	1011	337	129,1
Июнь	472	443	483	1398	466	178,5
Июль	295	261	305	861	287	110
Август	108	84	129	321	107	41,0
Сентябрь	605	630	670	1905	635	243,3
Октябрь	610	450	515	1575	525	201,0
Ноябрь	184	177	185	546	182	69,7
Декабрь	103	168	10	375	125	47,9
ИТОГО	3070	3144	3182	9396	261	100,0

1. Рассчитываем среднемесячные уровни реализации картофеля за три г. по формуле ***средней арифметической простой***:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum y}{n}; \quad \bar{y}_{янв.} = \frac{70+71+63}{3} = \frac{204}{3} = 68\,т,$$

и так за каждый месяц (графа 5 табл.7.7).

2. Вычисляем ***общую постоянную среднюю*** по всему ряду динамики:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \text{ или } \bar{y} = \frac{\sum\sum y_i}{n_i} = \frac{9396}{36} = 261\,т.$$

3. Вычисляем ***индексы сезонности*** и результаты заносим в графу 6 табл. 7.7:

$$I_{сез} = \frac{68}{261} \cdot 100 = 26{,}3\%.$$

4. Строим график сезонной волны реализации картофеля за изучаемый период (рис. 7.1) и делаем выводы.

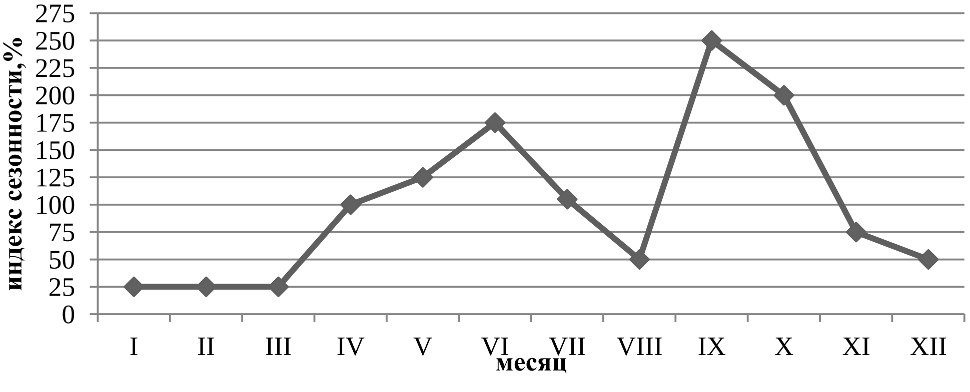

Рис. 7.1. Сезонная волна реализации картофеля

Наименьший спрос на картофель приходится на январь-март, а наибольший – на сентябрь-октябрь.

8. Статистические индексы

8.1. Классификация статистических индексов

Индекс – обобщающий показатель сравнения явлений, состоящих из элементов, не поддающихся суммированию. Он является относительной величиной и вычисляется в коэффициентах или процентах. Чтобы выразить индекс в %, коэффициент умножают на 100.

Индексы могут показывать изменение индексируемой величины в пространстве (в сравнении с другой территорией), по сравнению с нормативными или плановыми значениями индексируемого показателя, относительно фактических значений показателя прошлого периода (в динамике). Виды статистических индексов представлены на рис.8.1.

Рис. 8.1. Классификация статистических индексов

8.2. Индивидуальные и общие индексы

В соответствии с классификацией рис. 8.1 ***все индексы по степени агрегирования делятся на индивидуальные и сводные*** (общие, групповые). Расчет индивидуальных индексов практически не отличается от расчетов темпа роста – для одного вида продукции. Разработана специальная символика и приняты соответствующие условные обозначения.

Знак индивидуального индекса – i , физический объем в натуральном виде единицы товара – q, цена единицы товара – p, себестоимость единицы товара – z.

Индивидуальные индексы ***в зависимости от содержания характера изучаемых общественных явлений делятся на количественные показатели и качественные***. Если показатели характеризуют общий, суммарный объем явления, например, количество продукции в натуральном выражении, численность работников предприятия, такие показатели называются ***количественными***. Их получают путем непосредственного суммирования или подсчета, размер их характеризуется абсолютными величинами.

Если показатели характеризуют уровень явления в расчете на ту или иную единицу совокупности: выработка продукции, себестоимость единицы продукции, средняя заработная плата и т.д., такие показатели называются ***качественными***. Они исчисляются делением количественных показателей и носят вторичный, производный характер. Качественные показатели измеряют не общий объем, а интенсивность, эффективность явления.

Индивидуальные индексы:

1) ***динамики цены*** $i_p = \frac{p_1}{p_0}$;

2) ***физического объема товара*** $i_q = \frac{q_1}{q_0}$;

3) ***себестоимости единицы продукции*** $i_z = \frac{z_1}{z_0}$;

4) ***планового задания по себестоимости*** $i_{пз} = \frac{z_{пл}}{z_0}$;

5) ***выполнения плана по себестоимости*** $i_{вп} = \frac{z_1}{z_{пл}}$.

Общие индексы могут быть двух видов (групп).

К ***первой группе*** общих индексов относится, например, индекс стоимости продукции (товарооборота) в фактических ценах:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0},$$

где I – шифр общего индекса; pq – стоимость продукции (в показатель входят два элемента: p – цена, q – физический объем); $\sum$ – сумма по всем товарам.

Основной формой общих индексов ***второй группы*** является агрегатная, которая применяется для нахождения изменения элемента, входящего в сложное явление в виде агрегата. Агрегаты общего индекса различаются только индексируемыми величинами.

Индексы ***количественных*** показателей исчисляются ***с весами базисного периода***, что позволяет исключить изменение качественного показателя в отчетном периоде (в сопоставимых, неизменных ценах p_0):

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

Индексы ***качественных*** показателей исчисляют ***с весами отчетного периода***, что позволяет знать изменение качественных характеристик (цены) для отчетного периода: $I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$.

Индексы находятся в той же взаимосвязи, что и показатели, относительное изменение которых они отражают. Динамика стоимости продукции выражается так: $I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$;

$I_{pq} = I_p \cdot I_q$ – ***мультипликативная модель***.

Изменение стоимости можно ***разложить по факторам в абсолютных величинах*** как разность числителя и знаменателя соответствующего индекса: $\Delta_{pq} = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = (\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1) + (\sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0)$;

$\Delta_{pq} = \Delta^p_{pq} + \Delta^q_{pq}$ – ***аддитивная модель***.

Δ^p_{pq} – разность агрегатов общего индекса цен. $\Delta^p_{pq} = (\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1)$ показывает изменение стоимости продукции за счет изменения цен, характеризует выручку от продажи, т.е. экономию (перерасход) денежных средств населения в результате среднего снижения (повышения) цен;

Δ^q_{pq} – разность между агрегатами общего индекса физического объема, $\Delta^q_{pq} = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0$ – показывает изменение стоимости продукции за счет изменения объема продукции в неизменных ценах.

Пример 8.1. Имеется информация о проданных товарах (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Реализация двух видов товаров в супермаркете города

Товар	Единица измерения	Количество, ед.		Цена, р.		Общая стоимость товара, р.			
		базисный период q_0	отчетный период q_1	базисный период p_0	отчетный период p_1	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	p_1q_0
А Б	кг л	150 80	100 100	10 3	20 5	1500 240	2000 500	1000 300	3000 400
		-	-	-	-	1740	2500	1300	3400

1. Определить индивидуальные индексы объемов продаж в натуральном выражении и цен.

По товару А: $i_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{100}{150} = 0{,}667$, или 66,7%, $i_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{20}{10} = 2{,}0$, или 200%;

по товару Б: $i_q = \frac{q_1}{q_0} = \frac{100}{80} = 1{,}25$, или 125%, $i_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{5}{3} = 1{,}667$, или 166,7%.

По товару А объем проданных товаров в отчетном периоде по сравнению с базисным снизился на (100 – 66,7) = 33,3%, а цены на товар возросли в два раза. По товару Б объем товаров увеличился на 25%, хотя цены возросли на 66,7%.

2. Вычислить агрегатный индекс физического объема в сопоставимых ценах.

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{1340}{1740} = 0{,}747, \text{ или } 74{,}7\%.$$

Количество проданных двух видов товаров в отчетном периоде снизилось на 25,3% (100 – 74,7) по сравнению с базисным периодом.

8.3. Индексы Ласпейреса и Пааше

Если подходить к классификации индексов с чисто математических позиций, в зависимости от вида выбранных весов, все индексы можно разделить на две группы (см. рис. 8.1, табл. 8.2):

1) индексы, рассчитанные ***по весам базисного периода*** (формулы Ласпейреса);

2) индексы, рассчитанные ***по весам отчетного периода*** (формулы Пааше).

Таблица 8.2

Индексы Ласпейреса и Пааше

Наименование	Формула индекса	
	Ласпейреса (с базисными весами)	Пааше (с отчетными весами)
Индекс физического объема, I_q	$\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$ (1)	$\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$ (2)
Индекс цен, I_p	$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$ (3)	$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$ (4)

Пример 8.2

1. Вычислить ***агрегатные индексы цен*** по формулам ***Пааше*** и ***Ласпейреса*** по данным табл. 8.1;

а) по формуле ***Пааше*** (объем товаров в отчетном периоде (4)):

$$I_p^П = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{2500}{1300} = 1{,}923, \text{ или } 192{,}3\%;$$

б) по формуле ***Ласпейреса*** (объем товаров в базисном периоде (3)):

$$I_p^Л = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{3400}{1740} = 1{,}954, \text{ или } 195{,}4\%.$$

Если бы население приобрело товаров в отчетном периоде столько же, сколько и в базисном, то цены в среднем увеличилось бы на 95,4%.

Заниженное значение индекса Пааше объясняется тем, что более резкое превышение цен товаров группы А (почти в 2 раза) по сравнению с товарами группы Б (на 66,7%) вызвало снижение объема покупок (на 33,3%), в то время как на товары группы Б объем продаж увеличился на 25%.

2. Вычислить ***общий индекс товарооборота*** в фактических ценах.

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{2500}{1740} = 1{,}436, \text{ или } 143{,}6\%.$$

Товарооборот по двум группам товаров увеличился на 43,6%.

3. Вычислить ***абсолютные приросты товарооборота*** за счет изменения объемов продаж, цен и совместного действия обоих факторов.

Изменение объемов продаж:

$$\Delta_{pq}^{q} = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 1300 - 1740 = -440 \text{ тыс. р.}$$

За счет среднего снижения количества проданных товаров выручка от продажи снизилась на 440 тыс.р.

Изменение цен:

а) по методике Пааше:

$$\Delta_{pq}^{p} = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 2500 - 1300 = 1200 \text{ тыс. р.}$$

За счет среднего роста цен на товары денежная выручка продавцов возросла на 1200 тыс. р., эту же величину составил перерасход денежных средств населения;

б) по методике Ласпейреса:

$$\Delta_{pq}^{p} = \sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0 = 3400 - 1740 = 1660 \text{ тыс. р.}$$

Если бы население в отчетном периоде купило столько же товаров, сколько в базисном периоде, то в результате среднего роста цен перерасход составил бы 1660 тыс. р.

Общий абсолютный прирост за счет действия двух факторов:

$$\Delta_{pq} = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 2500 - 1740 = 760 \text{ тыс. р.}$$

4. Показать взаимосвязь между общими индексами и между абсолютными приростами товарооборота:

а) взаимосвязь между индексами: $I_{pq}=I_p \cdot I_q=1{,}923 \cdot 0{,}747=1{,}436$ (***мультипликативная модель***);

б) взаимосвязь между абсолютными приростами товарооборота:

$\Delta_{pq} = \Delta_{pq}^{p} + \Delta_{pq}^{q} = 1200 - 440 = 760$ тыс. р. (***аддитивная модель***).

Индексы цен Ласпейреса и Пааше не совпадают, так как имеют различное экономическое значение.

$I_p^П$ характеризует изменение отчетного периода по сравнению с базисным по товарам, реализованным в отчетном периоде, и фактическую экономию (перерасход) от изменения цен, т.е. насколько товары в отчетном периоде стали дороже (дешевле), чем в базисном.

$I_p^Л$ характеризует, насколько изменились цены в отчетном периоде по сравнению с базисным, но по той продукции, которая была реализована в базисном периоде, и экономию (перерасход), которую можно было бы получить от изменения цен, т.е. реальную экономию (перерасход). Характеризует, во сколько раз товары базисного периода подорожали из-за изменения их цен в отчетном периоде.

Обычно $I_p^П < I_p^Л$. Считается, что $I_p^П$ дает заниженную оценку инфляционным процессам, а $I_p^Л$ – завышенную.

Компромиссным решением многие экономисты считают ***индекс Фишера***, вычисляемый по формуле средней геометрической:

$$I_p^Ф = \sqrt{I_p^Л \cdot I_p^П} = \sqrt{\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0} \cdot \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}}.$$

Он оценивает не только набор товаров базисного периода p_1q_0 по ценам текущего, но и текущего периода p_0q_1 по ценам базисного.

8.4. Средние индексы

Агрегатные индексы $I_p = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ и $I_q = \frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0}$ содержат товарооборот базисного периода $\sum p_0q_0$ и отчетного периода $\sum p_1q_1$, а также величину условного товарооборота $\sum p_0q_1$, значение которой необходимо вычислять дополнительно. Данные для этого не всегда имеются в формах статистической отчетности, но зато бывают известны индивидуальные индексы i_p и i_q. В этом случае переходят от агрегатной формы индекса к средней, тождественной агрегатной.

Применяются следующие формулы средних индексов с использованием индивидуальных.

1. ***Средний индекс физического объема для количественных показателей:***

$$I_q = \frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0},\ i_q = \frac{q_1}{q_0}, \text{ откуда } q_1 = i_q \cdot q_0.$$

Подставляем в числитель значение q_1: $I_q = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0p_0}$ – ***средний арифметический индекс Ласпейреса***.

Пример 8.3. Имеются данные по товарообороту двух групп товаров (табл. 8.3).

Таблица 8.3

Товарооборот двух групп товаров

Товар	Товарооборот базисного периода, млн р. p_0q_0	Изменение объема продаж в отчетном периоде по сравнению с базисным, %	Темп роста, i_q	Условный товарооборот, млн р. $p_0q_1=i_qq_0p_0$
А	20	+5	1,05	21
Б	30	-10	0,90	27
Итого	50	-	-	48

Определить изменение объема проданных товаров в отчетном периоде по сравнению с базисным. $I_q = \dfrac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \dfrac{48}{50} = 0{,}96$, или 96%. Объем проданных товаров снизился на 4%.

2. ***Средний индекс цен для качественных показателей***.

Средний индекс цен по методике Пааше: $I_p^П = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$, $i_p = \dfrac{p_1}{p_0}$, откуда $p_0 = \dfrac{p_1}{i_p}$. Значит, $I_p = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum \dfrac{p_1 q_1}{i_p}}$ – ***средний гармонический индекс Пааше***.

Пример 8.4. Имеются данные о продаже товаров (табл. 8.4).

Таблица 8.4

Продажа товаров

Товар	Продано в феврале, тыс.р. p_1q_1	Изменение цен в феврале по сравнению с январем, %	Темп роста, i_p	Условный товарооборот тыс.р. $p_0q_1 = p_1q_1/i_p$
Мясо	220	+10	1,10	200
Молоко	160	+8	1,08	148
Итого	380	-	-	348

1. Определить изменение цен в феврале по сравнению с январем в относительных величинах. $I_p = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum \dfrac{p_1 q_1}{i_p}} = \dfrac{380}{348} = 1{,}092$, или 109,2%.

В абсолютных величинах: $\Delta_{pq}^{p} = \sum p_1 q_1 - \sum \dfrac{p_1 q_1}{i_p} = 380 - 348 = 32$.

В среднем по двум группам товаров цены в феврале по сравнению с январем повысились на 9,2%, вследствие чего население перерасходовало денежной массы на (380 – 348) = 32 тыс. р.

2) Как изменится объем проданных товаров в феврале по сравнению с январем, если товарооборот за этот период увеличится на 6%?

Исходя из взаимосвязи между индексами $I_{pq} = I_p \cdot I_q$, находим непосредственно по мультипликативной формуле:

$I_q = \frac{I_{pq}}{I_p} = \frac{1{,}06}{1{,}092} = 0{,}97$, или 97%. Объем проданных товаров в феврале по сравнению с январем снизился на 3% в связи с увеличением цен на товары: (97 – 100)= – 3%.

8.5. Индексный анализ изменения среднего уровня: индексы переменного, постоянного состава и влияния структурных сдвигов

Индексный метод широко применяется для изучения динамики средних величин и выявления факторов, влияющих на их динамику. С этой целью исчисляют систему взаимосвязанных индексов переменного, постоянного состава и структурных сдвигов (только по однородной продукции).

Индекс переменного состава характеризует отношение средних величин ***качественных*** показателей (цены, себестоимости, трудоемкости, фондоотдачи и т.д.), т.е. индексируемой средней величины:

$$I_{\text{пер. сост}} = I_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}, \quad \text{где } \bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}.$$

На индекс переменного состава оказывают влияние два фактора.

1. Изменение индексируемой величины при одной и той же структуре совокупности, т.е. при неизменном весе-соизмерителе (как правило, на уровне отчетного периода). Такой индекс называют индексом постоянного (фиксированного) состава и исчисляют по формуле

$$I_{\text{пост. сост}} = I_x = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_{\text{усл}}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} \text{ (индекс Пааше)},$$

где $\bar{x}_{\text{усл}} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1}$ – условный средний показатель.

Индекс постоянного состава показывает, как в отчетном периоде по сравнению с базисным изменяется среднее значение показателя по какой-либо однородной совокупности за счет изменения только самой индексируемой величины, т.е. когда влияние структурного фактора устранено.

2. Влияние только структурных изменений на исследуемый средний показатель измеряют ***индексом структурных сдвигов,*** который вычисляют как отношение среднего уровня индексируемого показателя базисного периода, рассчитанного на отчетную структуру, к фактической средней этого показателя в базисном периоде: $I_{\text{стр}} = \frac{\bar{x}_{\text{усл}}}{\bar{x}_0} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$.

Следовательно, $I_{\bar{x}} = I_x \cdot I_{стр}$ – мультипликативная модель.

Абсолютное изменение среднего показателя по индексу переменного состава (на единицу продукции): $\Delta_{\bar{x}} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} - \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$, в том числе изменение среднего показателя за счет:

1) изменения индексируемой величины:

$$\Delta_{\bar{x}}^{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_{усл} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} - \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1};$$

2) изменения в структуре (структурные сдвиги):

$$\Delta_{\bar{x}}^{стр} = \bar{x}_{усл} - \bar{x}_0 = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} - \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}.$$

Можно определить эти индексы через долю: $d = \frac{f}{\sum f}$.

Индекс переменного состава: $I_{\bar{x}} = \frac{\sum x_1 d_1}{\sum x_0 d_0}$.

Индекс постоянного состава: $I_x = \frac{\sum x_1 d_1}{\sum x_0 d_1}$.

Индекс структурных сдвигов: $I_{сс} = \frac{\sum x_0 d_1}{\sum x_0 d_0}$.

Пример 8.5. Имеются данные о выпуске однородной продукции по предприятиям АО (табл. 8.5).

Таблица 8.5

Выпуск продукции и ее себестоимость на предприятиях

Предприятие	Выпуск продукции				Себестоимость единицы продукции, р.		Индивидуальный индекс себестоимости $i_z=z_1/z_0$
	базисный период		отчетный период				
	тыс. шт. q_0	% d_0	тыс. шт. q_1	% d_1	z_0	z_1	
1	8,5	17,2	9	14,5	20	22	1,1
2	16,0	32,3	18	29,0	15	16	1,067
3	25,0	50,5	35	56,5	8	9	1,025
Итого	49,5	100,0	62	100,0	12,32	12,92	1,049

Определить для трех предприятий вместе.

1. Среднюю себестоимость единицы продукции по формуле ***средней арифметической взвешенной***.

Базисный период: $\bar{z}_0 = \frac{\sum z_0 q_0}{\sum q_0} - \frac{8{,}5 \cdot 20 + 16 \cdot 18 + 25 \cdot 8}{8{,}5 + 16 + 25} = \frac{610}{49{,}5} = 12{,}32$ р.

Отчетный период: $\bar{z}_1 = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum q_1} - \frac{9 \cdot 22 + 18 \cdot 16 + 35 \cdot 9}{9 + 18 + 35} = \frac{801}{62} = 12{,}92$ р.

Условная средняя $\bar{z}_{усл.} = \frac{\sum z_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{20 \cdot 9 + 15 \cdot 18 + 8 \cdot 35}{9 + 18 + 35} = \frac{730}{62} = 11{,}77$ р.

2. Индекс себестоимости переменного состава (индекс средней себестоимости).

$$I_{\bar{z}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_0} = \frac{12{,}92}{12{,}32} = 1{,}049, \text{ или } 104{,}9\%.$$

Средняя себестоимость единицы продукции по трем предприятиям вместе возросла на 4,9%.

3. Среднее изменение себестоимости единицы продукции за счет изменения ее на отдельных предприятиях, т.е. индекс себестоимости постоянного состава.

$$I_z = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_{усл.}} = \frac{12{,}92}{11{,}77} = 1{,}098, \text{ или } 109{,}8\%.$$

В среднем по трем предприятиям вместе себестоимость единицы продукции повысилась на 9,8%.

4. Индекс структурных сдвигов:

а) непосредственно по формуле средней себестоимости:

$$I_{стр} = \frac{\bar{z}_{усл}}{\bar{z}_0} = \frac{11{,}77}{12{,}32} = 0{,}995, \text{ или } 95{,}5\%;$$

б) через взаимосвязь индексов по мультипликативной модели:

$$\bar{I}_{\bar{z}} = I_z \cdot I_{стр}, \text{ откуда } I_{стр} = \frac{\bar{I}_{\bar{z}}}{I_z} = \frac{1{,}049}{1{,}098} = 0{,}955, \text{ или } 95{,}5\%.$$

Влияние структурных сдвигов выпуска продукции на трех предприятиях снизило себестоимость на (100 – 95,5) = –4,5% за счет изменения удельного веса отдельных предприятий в общем выпуске продукции, а именно: за счет того, что на предприятии № 3, имеющем самый низкий уровень себестоимости, выпускается более 50% общего объема продукции.

Одновременное действие двух факторов на среднюю себестоимость по всем предприятиям повысилось на 4,9% (104,9 – 100).

5. Абсолютное изменение средней себестоимости на единицу продукции: $\Delta_{\bar{z}} = \bar{z}_1 - \bar{z}_0 = 12{,}92 - 12{,}32 = 0{,}6$ р., в том числе:

а) за счет изменения себестоимости по отдельным предприятиям:

$\Delta_{\bar{z}}^{z} = \bar{z}_1 - \bar{z}_{усл} = 12{,}92 - 11{,}77 = 1{,}15$ р;

б) за счет изменения структурных сдвигов:

$\Delta_{\bar{z}}^{стр} = \bar{z}_{усл} - \bar{z}_0 = 11{,}77 - 12{,}32 = -0{,}55$ р.

Проверка: $\Delta_{\bar{z}} = \Delta_{\bar{z}}^{z} + \Delta_{\bar{z}}^{стр} = 1{,}15 + (-0{,}55) = 0{,}6$ р. – ***аддитивная модель.***

Средняя себестоимость на единицу продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным возросла на 0,6 р. Это изменение произошло за счет влияния двух факторов:

а) увеличения себестоимости по отдельным предприятиям на 1,15 р.;

б) изменение в структуре предприятий, а именно: на предприятии № 3, имеющем самую низкую себестоимость продукции и самый большой удельный вес выпускаемой продукции, что привело к снижению средней себестоимости на 0,55 р. Поэтому общее увеличение средней себестоимости составило 0,6 р., несмотря на то что на предприятиях она возросла значительно.

Если рассмотреть абсолютные изменения средней себестоимости на весь объем фактически выпущенной продукции в отчетном периоде q_1, то это составит:

$$\Delta_{\bar{z}} = (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)\sum q_1 = 0{,}6 \cdot 62 = 37{,}2 \text{ тыс. р.},$$

в том числе:

а) $\Delta_{\bar{z}}^{z} = (\bar{z}_1 - \bar{z}_{\text{усл.}}) \cdot \sum q_1 = 1{,}15 \cdot 62 = 71{,}3 \text{ тыс. р.};$

б) $\Delta_{\bar{z}}^{\text{стр}} = (\bar{z}_{\text{усл.}} - \bar{z}_0)\sum q_1 = -0{,}55 \cdot 62 = -34{,}1 \text{ тыс. р.}$

Проверка: $\Delta_{\bar{z}} = \Delta_{\bar{z}}^{z} + \Delta_{\bar{z}}^{\text{стр}} = 71{,}3 + (-34{,}1) = 37{,}2 \text{ тыс. р.}$

Абсолютный перерасход издержек производства составил 37,2 тыс.р. за счет увеличения себестоимости единицы продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным на всех предприятиях.

Глоссарий и формулы

Основные понятия	Содержание
1. Статистическое наблюдение	Первая стадия всякого статистического исследования, представляющая собой научно организованный по единой программе учет фактов, характеризующих явления и процессы общественной жизни, и сбор полученных на основе этого учета массовых данных
2. Генеральная совокупность	Совокупность наблюдаемых данных при сплошном наблюдении, т.е. всех единиц изучаемой совокупности
3. Выборочная совокупность	Совокупность единиц, выбранных из генеральной совокупности
4. Ошибка выборки	Разность между показателями генеральной и выборочной совокупности
5. Группировка	Разбиение совокупности на группы, однородные по какому-либо признаку
6. Интервал	Количественная граница группы, разность между верхней и нижней границами
7. Вариационный ряд	Ряд распределения, построенный по количественному признаку
8. Ряд распределения	Группировка, в которой для характеристики групп применяется один показатель – численность группы
9. Формула Стерджесса	Число групп вариационного ряда $n = 1 + 3{,}322\lg N$, где N – число элементов совокупности
10. Статистическая таблица	Средство наглядного и рационального представления результатов статистического исследования в виде граф и строк
11. Статистический график	Условное изображение числовых величин и их соотношений в виде различных геометрических образов – точек, линий, плоских фигур и т.п.
12. Полигон	Геометрическая фигура – ломаная линия, соединяющая вершины, абсциссами которых являются значения варьирующегося признака, а ординатами – соответствующие им частоты
13. Гистограмма	Геометрическое изображение интервального вариационного ряда, где на оси абсцисс откладываются границы интервалов, являющиеся основаниями прямоугольников, площади которых равны либо пропорциональны частотам
14. Кумулята	Ломаная линия, вершины которой имеют в качестве абсцисс значение признака (граница интервала), ординаты – нарастающие итоги частот
15. Степенная средняя невзвешенная (простая)	$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – варианты $\quad \overline{X} = \sqrt[k]{\dfrac{\sum x^k}{n}}$
16. Степенная средняя взвешенная	$f_1, f_2, \ldots, f_n$ – вес или частота $\quad \overline{X} = \sqrt[k]{\dfrac{\sum x^k f}{\sum f}}$
17. Средняя гармоническая	Невзвешенная (простая) взвешенная $\overline{X} = \dfrac{n}{\sum \frac{1}{x}}$; $\quad \overline{X} = \dfrac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}}$, где M – объем явления, M = xf

Продолжение таблицы

Основные понятия	Содержание
18. Средняя арифметическая	Невзвешенная (простая) $\overline{X} = \frac{\sum x}{n}$; взвешенная $\overline{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$
19. Средняя геометрическая	Невзвешенная $\overline{X} = \sqrt[n-1]{\Pi x_i} = \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$
20. Средняя квадратическая	Невзвешенная (простая) $\overline{X}_{кв} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$; взвешенная $\overline{X}_{кв} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$
21. Правило мажорантности средних	$\overline{X}_{гарм} \le \overline{X}_{геом} \le \overline{X}_{арифм} \le \overline{X}_{квадр}$
22. Мода	Наиболее часто встречающееся значение признака для интервального ряда: $Mo = x_0 + k\frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)}$
23. Медиана	Величина признака, которая делит упорядоченную последовательность его значений на две равные по численности части. Для интервального ряда: $Me = x_0 + k\frac{\frac{\sum f}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}}$
24. Квартили	Значение признака, делящее ранжированную совокупность на четыре равновеликие части для интервального ряда: нижний квартиль $Q_1 = x_{Q1} + k\frac{\frac{1}{4}\sum f - S_{Q1-1}}{f_{Q1}}$; верхний квартиль $Q_3 = x_{Q3} + k\frac{\frac{3}{4}\sum f - S_{Q3-1}}{f_{Q3}}$
25. Децили	Значение признака, делящее ранжированную совокупность на десять равновеликих частей
26. Вариационный размах	$R = X_{max} - X_{min}$ – разница между максимальным и минимальным значениями признака
27. Среднее линейное отклонение	Невзвешенная $\bar{d} = \frac{\sum\lvert x - \bar{x}\rvert}{n}$; взвешенная $\bar{d} = \frac{\sum\lvert x - \bar{x}\rvert f}{\sum f}$

Продолжение таблицы

Основные понятия	Содержание
28. Дисперсия	Невзвешенная $\sigma^2 = \frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}$; взвешенная $\sigma^2 = \frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 f}{\sum f}$; упрощенный способ (моментов) $\sigma^2 = \frac{\sum\left(\frac{x-a}{k}\right)^2 f}{\sum f} \times k^2 - \left(\bar{x}-a\right)^2$
29. Среднее квадратическое отклонение	Невзвешенная $\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}}$; взвешенная $\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 f}{\sum f}}$
30. Коэффициент осцилляции	$V_R = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100$
31. Относительное линейное отклонение	$V_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100$
32. Коэффициент вариации	$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$
33. Правило сложения дисперсий	$\sigma^2 = \overline{\sigma_i^2} + \delta^2$ $\sigma^2 = \sigma^2_{ост} + \sigma^2_{факт}$
34. Дисперсия альтернативного признака	$\sigma^2 = pq, \qquad p + q = 1$
35. Эмпирический коэффициент детерминации	$\eta^2 = \frac{\sigma^2_{факт}}{\sigma^2}$
36. Эмпирическое корреляционное отношение	$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{факт}}{\sigma^2}}$
37. Средняя ошибка выборки при случайном повторном отборе	Генеральная совокупность: для средней $\mu_x = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$; для доли $\mu_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$. Выборочная совокупность: $\mu_x = \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}}$; $\mu_\omega = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$
38. Предельная ошибка при случайном повторном отборе	Для средней $\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}}$; для доли $\Delta_\omega = t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$

Продолжение таблицы

Основные понятия	Содержание
39. Предельная ошибка при механическом (бесповторном) отборе	Для средней $\Delta_x = t\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$; для доли $\Delta\omega = t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$
40. Необходимый объем выборки при случайном повторном отборе	Для средней $n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2}{\Delta_x{}^2}$; для доли $n = \frac{t^2\omega(1-\omega)}{\Delta^2{}_\omega}$
41. Необходимый объем выборки при случайном бесповторном (механическом) отборе	Для средней $n = \frac{t^2\tilde{\sigma}^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2\tilde{\sigma}^2}$; для доли $n = \frac{t^2\omega(1-\omega)N}{\Delta_\omega^2 N + t^2\omega(1-\omega)}$
42. Ряд динамики	Последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень развития изучаемого явления
43. Абсолютные приросты в рядах динамики	Для ряда динамики $y_0, y_1, \ldots y_n$ абсолютный прирост: базисный $\Delta_{баз} = y_i - y_0$; цепной $\Delta_{цепн} = y_i - y_{i-1}$
44. Темп роста в рядах динамики	Для ряда динамики $y_0, y_1, \ldots y_n$: базисный $T_p = \frac{y_i}{y_0}$; цепной $T_p = \frac{y_i}{y_{i-1}}$
45. Темп прироста в рядах динамики	Базисный $T_{пр} = \frac{y_i - y_0}{y_0}$; цепной $T_{пр} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}}$
46. Средний абсолютный прирост	Для ряда динамики $y_0, y_1, \ldots, y_n$ $\overline{\Delta} = \frac{y_i - y_0}{n-1} = \frac{\Delta_{БАЗ}}{n-1} = \frac{\sum \Delta_{ЦЕПН}}{n-1}$
47. Средний темп роста	$\overline{T}_p = \sqrt[n-1]{\Pi T_p} = \sqrt[n-1]{T_{p1} \cdot T_{p2} \cdot \ldots \cdot T_{pn-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}}$
48. Коэффициент опережения	По темпам роста и прироста показывает, во сколько раз один темп роста больше другого
49. Метод наименьших квадратов	Метод выявления зависимости изменения ряда динамики путем обеспечения наименьшей суммы квадратов отклонений фактических уровней от выравненных
50. Тренд	Тенденция динамики, как правило, выраженная в форме уравнения, наилучшим образом аппроксимирующего фактическую тенденцию динамики
51. Параметры линейного тренда	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$; a_0, a_1 — параметры прямой; t — показатель времени. Система нормальных уравнений $\begin{cases} a_0 n + a_1\sum t = \sum y \\ a_0\sum t + a_1\sum t^2 = \sum y \end{cases}$ при $\sum t = 0$ $a_0 = \frac{\sum y}{n}$, $a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$

Продолжение таблицы

Основные понятия	Содержание
52. Индекс сезонности в стабильных рядах	$I_{СЕЗ}=\frac{\overline{y_i}}{\bar{y}}\cdot 100$, где $\overline{y_i}$ – осредненные эмпирические данные по одноименным периодам; $\bar{y}$ – общая средняя
53. Индекс сезонности с тенденцией роста	$I_{СЕЗ}=\left[\sum\frac{\overline{y_i}}{\hat{y}_n}\cdot 100\right]\div n$, где $\hat{y}_n$ – переменная средняя (выравненные уровни)
54. Вероятностные границы интервала прогнозируемого явления	$\hat{y}_{пр}=\hat{y}_t\pm t_\alpha\cdot\sigma_{\hat{y}t}$, $\sigma_{\hat{y}t}=\sqrt{\frac{(y_i-\hat{y}_t)^2}{n-m}}$, где n – число уровней ряда динамики; m – число параметров адекватной модели тренда
55. Индекс	Относительный показатель сравнения двух состояний простого и сложного явления, состоящего из соизмеримых или несоизмеримых элементов, во времени или в пространстве
56. Индивидуальный индекс	Относительный показатель, характеризующий соотношение уровней по отдельному виду единиц совокупности за два сравниваемых периода: индекс физического объема (количества) $i_q=\frac{q_1}{q_0}$; индекс цен $i_p=\frac{p_1}{p_0}$
57. Общий индекс стоимости товара	В случае неоднородности изучаемого явления сравнение уровней происходит после приведения их к одной общей мере, например, индекс общего объема товарооборота (индекс стоимости) в фактических ценах имеет вид: $I_{pq}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$
58. Агрегатный индекс цен	Пааше: $I_p=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ – объем выпуска в текущем периоде. Ласпейреса: $I_p=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ – объем выпуска в базисном периоде
59. Агрегатный индекс физического объема продукции	Пааше: $I_q=\frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_1}$ – цены текущего периода. Ласпейреса: $I_q=\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0}$ – цены базисного периода
60. Мультипликативная модель индексов	Произведение индексов: $I_p\cdot I_q=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\cdot\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=I_{pq}$; $I_p\cdot I_q=I_{pq}$

Продолжение таблицы

Основные понятия	Содержание
61. Аддитивная модель индексов	Абсолютное изменение стоимости товара $$\Delta_{pq} = \Sigma p_1 q_1 - \Sigma p_0 q_0$$ зависит от двух факторов: а) изменения цен на товары: $$\Delta_{pq}^{p} = \Sigma p_1 q_1 - \Sigma p_0 q_1;$$ б) изменения объема продаж: $$\Delta_{pq}^{q} = \Sigma q_1 p_0 - \Sigma q_0 p_0.$$ Сумма абсолютных изменений стоимости товара: $$\Delta_{pq}^{p} + \Delta_{pq}^{q} = \Delta_{pq}$$
62. Средний индекс цен	Гармонический: Пааше: $I_p = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum \dfrac{p_1 q_1}{i_p}}$. Арифметический: Ласпейреса: $I_p = \dfrac{\sum i_p p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$
63. Средний индекс объема	Гармонический: Пааше: $I_q = \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum \dfrac{q_1 p_1}{i_q}}$. Арифметический: Ласпейреса: $I_q = \dfrac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0}$
64. Индекс цен Фишера	$$I_p = \sqrt{I_p^{Л} \cdot I_p^{П}} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \cdot \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$
65. Индекс средней цены или индекс переменного состава	$$I_{\bar{p}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma q_1} : \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma q_0} = I_p \cdot I_{c.c}$$
66. Индекс постоянного состава	Изменения значений осредняемого признака у отдельных единиц совокупности: $$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1}$$
67. Индекс структурных сдвигов	Структурные изменения, под которыми понимается изменение доли отдельных единиц совокупности в общей их численности: $$\left(d = \frac{q}{\Sigma q}\right); \quad I_{c.c.} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}; \quad I_{c.c.} = \frac{I_{\bar{p}}}{I_p}$$
68. Мультипликативная модель средних уровней индексов	Если в индексах средних уровней в качестве весов используются удельные веса единиц совокупности в общей численности совокупности (показатели доли d), то система индексов имеет вид: $$I_{\bar{p}} = \frac{\Sigma p_1 d_1}{\Sigma p_0 d_0},\ I_p = \frac{\Sigma p_1 d_1}{\Sigma p_0 d_1},\ I_{c.c.} = \frac{\Sigma p_0 d_1}{\Sigma p_0 d_0},\ I_{\bar{p}} = I_p \cdot I_{c.c.}$$

Окончание таблицы

	Основные понятия	Содержание
69.	Абсолютный прирост (уменьшение) среднего уровня в целом по совокупности	Находится как разность числителя и знаменателя индекса переменного состава: $$\Delta\overline{p}=\overline{p}_1-\overline{p}_0=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma q_1}-\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma q_0}, \text{или } \Delta\overline{p}=\Sigma p_1d_1-\Sigma p_0d_0$$
70.	Абсолютный прирост (уменьшение) среднего уровня признака	В целом по совокупности за счет отдельных факторов рассчитывается как разность числителей и знаменателей индексов постоянного состава и структурных сдвигов: а) за счет изменения значений изучаемого признака у отдельных единиц совокупности: $$\Delta\overline{p}_p=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma q_1}-\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma q_1}, \text{или} \quad \Delta\overline{p}_p=\Sigma p_1d_1-\Sigma p_0d_1;$$ б) за счет структурных изменений: $$\Delta\overline{p}_d=\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma q_1}-\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma q_0}, \text{или} \quad \Delta\overline{p}_d=\Sigma p_0d_1-\Sigma p_0d_0.$$ В общем виде: $$\Delta\overline{p}=\Delta\overline{p}_p+\Delta\overline{p}_d$$

Библиографический список

1. Теория статистики: учеб. для студентов экон. специальностей вузов / Р.А. Шмойлова и др.; под ред. Р.А. Шмойловой. – 5-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 655 с.

2. Практикум по теории статистики: учеб. пособие для студентов экон. специальностей вузов / Р.А. Шмойлова, В.Г. Минашкин, Н.А. Садовникова; под ред. Р.А. Шмойловой. – 3-е изд. – М.: Финансы и статистика, 2009. – 415 с.

3. Общая теория статистики: тестовые тематические задания для студентов экон. специальностей дн. и заоч. форм обучения / [сост. А.Д. Лазарева, Н.М. Сурнина, К.О. Фоминых]. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2009. Раздел I. – 145 с.

4. Лазарева А.Д. Теория статистики: примеры решения контрольных заданий для студентов экон. специальностей оч. и заоч. форм обучения. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2002. – 63 с.

5. Эверитт Б.С. Большой словарь по статистике. – М.: Проспект, 2010. – 731 с.

6. Статистика: метод. указания и варианты контрольных заданий для бакалавров всех направлений и профилей подготовки заоч. формы обучения / [сост. Н.М. Сурнина, А.Д. Лазарева, С.И. Рекечинский, Т.Б. Рекечинская, В.А. Лазарев]. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2012. – 43 с.

7. Статистика. Базовый курс: учеб. для бакалавров / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Изд-во Юрайт, 2011. – 483 с.

8. Общая теория статистики: учебник / под ред. М.Г. Назарова – 2-е изд., стер. – М.: Изд-во «Омега-Л», 2011. – 410 с.

Интернет-источники

1. http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat/rosstatsite/main/ – Федеральная служба государственной статистики. Официальная статистическая информация. Текущая статистика, статсборники и ежегодники: «Россия в цифрах», «Российский статистический ежегодник», «Финансы России», «Инвестиции в России», «Регионы России» и др.

2. http://www.gks.ru/dbscripts/munst/munst65/DBInet.cgi – База данных показателей муниципальных образований. Создана Федеральной службой государственной статистики.

3. http://www.ersds.ru/default.aspx – Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Свердловской области. Разделы: УрФО, Свердловская область, Муниципальная статистика.

Оглавление

Учебное издание

Лазарева Алевтина Дмитриевна,
Сурнина Надежда Матвеевна,
Лазарев Владимир Александрович

ТЕОРИЯ СТАТИСТИКИ

Раздел I

Учебное пособие

Редактор и корректор *Л. В. Матвеева*

Поз. 184. Подписано в печать 25.12.2013.
Формат бумаги $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.
Печать плоская. Уч.-изд. л. 3,1. Усл. печ. л. 4,01.
Заказ 1381. Тираж 170 экз.
Издательство Уральского государственного экономического университета
620144, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта/Народной Воли, 62/45

Отпечатано с готового оригинал-макета в подразделении оперативной полиграфии
Уральского государственного экономического университета