Bruchterme – Zusammenfassung

Variablen: „Platzhalter“ für beliebige Zahlen. Man verwendet sie in mathematischen Ausdrücken in Form von Buchstaben oder Symbolen.

Terme: Unter einem Term versteht man einen mathematisch sinnvollen Ausdruck, bestehend aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichnen $(+,\ -,\ \cdot,\ :)$ und/oder Klammern. Im Grunde ist also jeder Ausdruck in der Mathematik ein Term.

Bruchterme: Unter einem Bruchterm versteht man einen Bruch aus Zähler und Nenner bei dem im Nenner mindestens eine Variable (Unbekannte) vorkommt. Beispiele: $\frac{8}{m}$; $\frac{7}{3+x}$; $\frac{2y}{3gm^2}$; $\frac{6+c}{b^2+km}$

1.) Definitionsmenge

Erinnerung: der Bruchstich ist mit einer Division gleichzusetzten ist. Die Division durch 0 ist **nicht erlaubt**. Da Bruchterme Variablen im Nenner enthalten, die für jede beliebige Zahl stehen, muss man die Anzahl der Zahlen, die die Variable annehmen darf, einschränken. Dies geschieht durch die Definitionsmenge.

Definitionsmenge: Die Definitionsmenge gibt an, welche Werte die Variable tatsächlich annehmen darf. Die Variable darf alle Zahlen annehmen, solange im Nenner nicht 0 steht. Man schreibt die Definitionsmenge folgendermaßen an: $D = \mathbb{R}\backslash\{"Zahl\ oder\ Zahlen, welche\ im\ Nenner\ zu\ 0\ führen\ würden"\}$. Je nach Nenner können eine oder mehrere Zahlen ausgeschlossen werden.

Beispiel 1: $\mathbf{\frac{3}{m}}$

Der Nenner, also m darf nicht 0 sein. Bei diesem Bruch ist es sehr einfach zu sehen, dass somit $m \neq 0$ gilt. Die Definitionsmenge lautet daher $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Beispiel 2: $\mathbf{\frac{3b}{b+9}}$

Der Nenner, also $b + 9$ darf nicht 0 sein. Es folgt die Rechnung

$$b + 9 \neq 0 \quad | - 9$$
$$b \neq -9$$

Die Definitionsmenge lautet daher $D = \mathbb{R}\backslash\{-9\}$

Beispiel 3: $\mathbf{\frac{2f+4}{6f-9}}$

Wieder muss man sich überlegen welche Zahl f nicht annehmen darf, sodass **im Nenner** nicht 0 steht. Es folgt die Rechnung

$$6f - 9 = 0 \quad | + 9$$
$$6f = 9 \quad |: 6$$
$$f = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Die Definitionsmenge lautet daher $D = \mathbb{R}\backslash\{1{,}5\}$ oder $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$

2.) Erweitern

Erweitern bedeutet den Zähler und den Nenner mit **demselben Term zu multiplizieren**.

Beispiel 1: Erweitere den Bruch $\frac{4}{9v}$ mit z $\rightarrow \frac{4 \cdot z}{9v \cdot z} = \frac{4z}{9vz}$

Beispiel 2: Erweitere den Bruch $\frac{2e^2}{5g^3}$ mit 3g $\rightarrow \frac{2e^2 \cdot 3g}{5g^3 \cdot 3g} = \frac{6e^2 g}{15g^4}$

Beispiel 3: Erweitere den Bruch $\frac{2c + h^2}{5ch^2}$ mit $3c^4h^2$

$$\rightarrow \frac{(2c + h^2) * 3c^4h^2}{5ch^2 * 3c^4h^2} = \frac{6c^5h^2 + 3c^4h^4}{15c^5h^4}$$

3.) Kürzen

Kürzen ist die Gegenoperation vom Erweitern. Beim Kürzen werden Zähler und Nenner mit demselben Term **dividiert**.

Du kannst nur Terme kürzen, die oben und unten mit allen restlichen Termen durch eine Multiplikation verbunden sind. Du darfst niemals aus einer Summe kürzen!

!!! Merksatz: Nur der Dumme kürzt aus der Summe!!!

Beispiel 1: $\frac{6g}{14g^3} \rightarrow \frac{6g}{14g^3} = \frac{6g^1}{14g^3} = \frac{{}^3\cancel{6}g^{\cancel{1}0}}{{}_7\cancel{14}g^{\cancel{3}2}} = \frac{3g^0}{7g^2} = \underline{\underline{\frac{3}{7g^2}}}$

Beispiel 2: $\frac{8z^3h}{16z^2h^3} \rightarrow \frac{{}^1\cancel{8}z^{\cancel{3}1}\cancel{h}}{{}_2\cancel{16}\cancel{z^2}h^{\cancel{3}2}} = \underline{\underline{\frac{1z}{2h^2}}}$

Beispiel 3: $\frac{\cancel{22}a^{\cancel{3}2}}{\cancel{4}\cancel{a}}$ $:2$ $= \frac{11a^2}{2}$

Beispiel 4: $\frac{\cancel{9}\cancel{d^2}k^{\cancel{7}6}}{\cancel{42}d^{\cancel{5}3}\cancel{k}}$ $:3$ $= \frac{3k^6}{14d^3}$

4.) Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und Nenner multipliziert. **TIPP: Vor dem Multiplizieren kürzen!**

$$\frac{5x^2}{2}\cdot\frac{2}{5x}=\frac{{}^1\cancel{5}x^{\cancel{2}1}\cdot\cancel{2}^1}{{}_1\cancel{2}\cdot {}_1\cancel{5x}}=\frac{1x\cdot 1}{1\cdot 1}=\underline{\underline{x}}$$

$$\frac{3x}{2a^3}\cdot\frac{16a^2}{9x}=\frac{{}^1\cancel{3x}\cdot{}^8\cancel{16a^2}}{{}_1\cancel{2}a^{\cancel{3}1}\cdot{}_3\cancel{9x}}=\frac{1\cdot 8}{1a\cdot 3}=\underline{\underline{\frac{8}{3a}}}$$

Kreuzweise kürzen!

$$\frac{{}^1\cancel{6}x}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{\cancel{18}_3a^2}=\frac{3x}{3a^2}=\underline{\frac{x}{a^2}}$$

$$-4yz\cdot\frac{5y^2}{2z}=\frac{-\cancel{4}^2yz\cdot 5y^2}{1\cdot\cancel{2}_1 z}=\frac{(-2yz)\cdot 5y^2}{z}=\frac{-10y^3\cancel{z}}{\cancel{z}}=\underline{-10y^3}$$

$$\frac{{}^3\cancel{6}ab}{\cancel{c}}\cdot\frac{c^{\cancel{2}}}{\cancel{2}_1d}=\underline{\frac{abc}{d}}$$

5.) Division

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. **TIPP: Vor dem Multiplizieren kürzen!**

$$\frac{2x}{3}:\frac{5x}{6}=\frac{2\cancel{x}}{{}_1\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^2}{5\cancel{x}}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

$$\frac{2x}{5}:16x^2=\frac{{}^1\cancel{2x}}{5}\cdot\frac{1}{{}_8\cancel{16}x^{\cancel{2}1}}=\frac{1\cdot 1}{5\cdot 8x^1}=\underline{\underline{\frac{1}{40x}}}$$

$$\frac{4t^2}{7}:\frac{14t^3}{21h}=\frac{\cancel{4}^2\cancel{t^2}}{\cancel{7}_1}\cdot\frac{\cancel{21}^3h}{\cancel{14}_2t^{\cancel{3}}}=\underline{\frac{6h}{7t}}$$

$$6m^3:\frac{12m}{7}=\frac{\cancel{6}^1m^{\cancel{3}2}}{1}\cdot\frac{7}{\cancel{12}_2\cancel{m}}=\underline{\frac{7m^2}{2}}$$

$$\frac{2g}{3m^2h}:\frac{4}{27mh^3}=$$

$$=\frac{\cancel{2}^1g}{\cancel{3}_1m^{\cancel{2}}\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{27}^9mh^{\cancel{3}2}}{\cancel{4}_2}=\underline{\frac{9gh^2}{2m}}$$

6.) Addition und Subtraktion

Bei der Addition und Subtraktion von Brüchen mit demselben Nenner addiert bzw. subtrahiert man die Zähler der Brüche miteinander und lässt den Nenner unverändert.

Achtung bei der Subtraktion: Ist im Zähler des Bruches, der subtrahiert werden soll eine Summe oder eine Differenz so gilt besondere Vorsicht! Ein **Minus vor einem Bruch** muss **wie** ein **Minus vor einer Klammer** behandelt werden! Es dreht alle Vorzeichen im Zähler des Bruches um!!!

!!!Ergebnisse werden immer in gekürzter Form angegeben!!!

Beispiel 1: $\frac{7a}{12y} - \frac{a}{12y} = \frac{7a - a}{12y} = \frac{{}^{1}\cancel{6}a}{{}_{2}\cancel{12}y} = \frac{a}{2y}$

Beispiel 2: $\frac{5a}{12y} + \frac{3a}{12y} = \frac{5a + 3a}{12y} = \frac{{}^{2}\cancel{8}a}{{}_{3}\cancel{12}y} = \frac{2a}{3y}$

Beispiel 3: $\frac{2x + y}{3x^2} + \frac{4x + 7y}{3x^2} = \frac{2x + y + 4x + 7y}{3x^2} = \frac{6x + 8y}{3x^2}$

Beispiel 4: $\frac{2x + y}{4x^2} - \frac{-x + 5y}{4x^2} = \frac{2x + y - (-x + 5y)}{4x^2} = \frac{2x + y + x - 5y}{4x^2} = \frac{3x - 4y}{4x^2}$

Bitte rechnet diese Beispiele ohne Lösung im Heft und vergleicht dann ob ihr es könnt.

7.) Doppelbrüche

Doppelbrüche kann man sehr einfach lösen indem man die Regel „**Außen mal Außen durch Innen mal Innen**“ anwendet. Anschließend wird gekürzt und dann multipliziert.

$$\frac{\frac{6}{3x^2}}{\frac{16}{9x^5}} = \frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot{}^{3}\cancel{9}x^{\cancel{5}\,3}}{{}_{1}\cancel{3}\cancel{x^{2}}\cdot\cancel{16}_{8}} = \frac{3\cdot 3x^3}{1\cdot 8} = \frac{9x^3}{8}$$

$$\frac{\frac{9a^7}{8x^5}}{\frac{21a}{18x^3}} = \frac{{}^{3}\cancel{9}a^{\cancel{7}\,6}\cdot{}^{9}\cancel{18}\cancel{x^{3}}}{{}_{4}\cancel{8}x^{\cancel{5}\,2}\cdot\cancel{21}_{7}\,\cancel{a}} = \frac{3a^6\cdot 9}{4x^2\cdot 7} = \frac{27a^6}{28x^2}$$

Die Doppelbrüche machen wir bitte gemeinsam in der Schule!